Ingreso 2019

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Autoridades de la UNCuyo
Rector
Ing. Agr. Daniel Ricardo Pizzi

Vicerrector
Dr. Prof. Jorge Horacio Barón

Secretaria Académica
Dra. Ing. María Dolores Lettelier

Autoridades del ITU
Director General
Ing. Jorge García Guibout

Secretaria de Extensión y Relaciones Institucionales
Lic. Adriana Defacci

Secretario de Administración y Finanzas
Cdor. Pedro Suso

Responsable del Área de Gestión Pedagógico-Didáctica
Lic. Prof. Eleonora Valdivieso

Directores y coordinadores

Mendoza
Ing. Gloria Tutera
Ing. Alejandro Fernández
Lic. Rosa Villegas
Ing. Fernando Castro
Ing. Nelson Mocayar

Luján de Cuyo
Lic. Gabriela Biondolillo

Rivadavia
Lic. Guillermo Barta

San Martín
Lic. Eduardo Ferrer

General Alvear
Pspg. Susana Semenzato

San Rafael
Lic. Romina Pietrelli

Tunuyán
Cdor. Oscar Niemetz

Coordinación de ingreso 2019
Esp. Marianela Aveni Metz

Equipo de producción de materiales de Matemática
Coordinadora: Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Norma Castellino
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño versión impresa y aula virtual
D.G. Noelia Díaz Puppato
D.G. Eduardo A. Lentini

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

MÓDULO 1

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu INSTITUTO TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO

Índice

MÓDULO 1: ***CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES***

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES

Conjuntos numéricos. Representación como intervalo en la recta numérica. Operaciones con números reales. Razones y proporciones.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

• Aplicar el concepto de intervalo en la recta numérica
• Operar con números reales en ejercicios concretos
• Utilizar la calculadora en la resolución de ejercicios
• Desarrollar criterio lógico en el uso de la calculadora
• Calcular porcentajes en situaciones de la vida cotidiana
• Reconocer porcentaje como una relación entre magnitudes directamente proporcionales

1.1. Conjuntos numéricos

Definición

Un conjunto numérico es una agrupación de números que cumplen con una serie de propiedades.

1.1.1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

La noción de número y la de contar han acompañado a la humanidad desde la prehistoria. La causa para que el ser humano comenzara a contar surgió, fundamentalmente, de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza, porque percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee y su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida. Por ejemplo, los cazadores marcaban señales en un palo para saber cuántos animales habían abatido en la cacería.

Tuvieron que pasar muchos años para que el hombre fuera cambiando su forma de vida: de cazador y recolector, pasó a ser, además agricultor y ganadero. Por ejemplo, cuando un pastor llevaba sus ovejas a pastar al campo, metía una piedra en su alforja. Luego, cuando las encerraba después del pastoreo, la cantidad de animales debía coincidir con la cantidad de piedras guardadas. Por cada oveja que encerraba, sacaba una piedra de su alforja, si había más piedras que ovejas, significaba que alguna se había perdido. Comparando cantidades es como el hombre comenzó a construir el concepto de número.

Piedras usadas por los sumerios en el intercambio comercial. (Aproximadamente en el año 9000 AC)

El conjunto de los números naturales es aquel conjunto que permite contar. Su primer elemento es 1, a cada número natural le sigue otro que se obtiene agregándole o sumándole una unidad a este, dicho número es su sucesor, lo podemos esquematizar como:

$\boxed{1} \rightarrow \boxed{1+1=2} \rightarrow \boxed{2+1=3} \rightarrow \ldots$

1+1 =2 → 2 es sucesor de 1

2+1=3 → 3 es sucesor de 2

n+1 es el sucesor de n

Un número natural y su sucesor se llaman consecutivos

De esta manera se construye el **conjunto de los Números Naturales** que utiliza el símbolo **IN.**

IN = { 1,2,3,...,n,n+1,... }

POR EJEMPLO

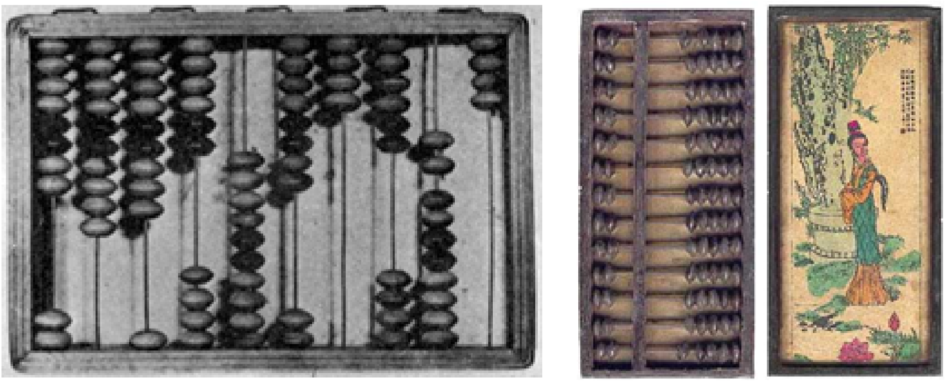
Si sumamos dos números naturales, obtenemos otro número natural 5+ 8 =13, si los restamos 5- 8 = -3, el resultado no es un número natural, por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales a los números enteros.

1.1.2. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números que hoy llamamos negativos, durante muchísimos años, fueron conocidos como "Números Falsos". En el Siglo V, en Oriente, se manipulaban números positivos y negativos utilizando ábacos, tablillas o bolas de diferentes colores. Cuando los grandes matemáticos de la época resolvían ecuaciones que daban resultados negativos, solían llamarlos absurdos porque aquéllas soluciones eran imposibles. Ya, mucho antes que ellos, los comerciantes chinos usaban en sus cuentas dos colores: los números de las deudas en color rojo y los que no lo eran en color negro.

Sin embargo, los indios fueron los primeros en interpretar los números positivos y negativos, como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.

A partir del siglo XV, algunos matemáticos muy conocidos comenzaron a utilizar los números negativos en sus trabajos. Stifel, popularizó el uso de los signos "+" y " -" para diferenciar los números positivos y negativos. Hasta entonces, se utilizaba la palabra latina minus que significa menos, o su abreviatura ***m***



ÁBACOS ANTIGUOS

Vimos que la operación diferencia $5 - 8$, no puede efectuarse en los números naturales.

Para superar esta dificultad introducimos:

- el número cero 0
- para cada número natural a el número negativo $-a$, llamado *opuesto* de a

Los números naturales se denominan *enteros positivos* y sus opuestos, *enteros negativos.*

POR EJEMPLO

El opuesto del número 2 es el número negativo -2.
Los números enteros positivos, los números enteros negativos y el número cero, dan lugar al *conjunto de los Números Enteros*, al cual notaremos con **Z**.

$$\boxed{\mathbf{Z} = \{ \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \}}$$

En este nuevo conjunto, 0 es el *elemento neutro* para la suma, es decir:

$0 + a = a + 0$ para todo número entero a.

Las operaciones suma, resta, producto entre números enteros, da siempre otro número entero.

¿Qué pasa si queremos efectuar una división con números enteros?

$\frac{8}{2} = 4$ $\qquad$ $\frac{-6}{3} = -2$ $\qquad$ $\frac{4}{3} = \ ?$ Su resultado no es un número entero

Lo mismo sucede si hablamos de tres cuartos de kilogramo, dos toneladas y media o de medio año. Surge entonces la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a los números racionales.

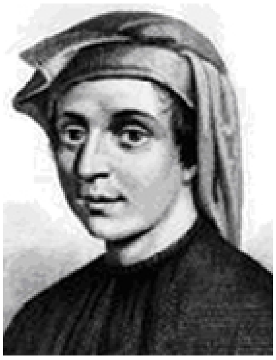
1.1.3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Todos los años, en el Antiguo Egipto, hacia el mes de julio, el río Nilo crecía e inundaba todas las tierras de labranza. Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría porque gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía en sus aguas.

La inundación duraba hasta el mes de septiembre. En esas fechas, el faraón enviaba a los agrimensores a medir los campos para repartir los terrenos entre los campesinos.

Esta medición la hacían con cuerdas anudadas a una misma distancia. A los agrimensores les asaltó un gran problema: había veces que al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda, ellos tenían que verificar que cada campo tuviera un determinado número de cuerdas por cada lado, ya que era la unidad de medida con la contaban. Solucionaron este problema inventando un nuevo tipo de número, el fraccionario, que era la razón de dos números enteros.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones. A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. A finales del siglo XVI, SimonStevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada. Por ejemplo: al número 456,765 lo escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3)
En el siglo XVII, aparecieron los números decimales tal y como los escribimos hoy: separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII, concretamente en 1792.



Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (ca. 1170 - 1250), también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración arábiga actualmente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero; y por idear la sucesión de Fibonacci.

Definimos el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

Definición

Los números racionales o fraccionarios se representan por el cociente de dos números enteros, llamados numerador y denominador respectivamente, siendo el denominador distinto de cero.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \text{con a y b enteros y } b \neq 0 \right\}$$

Notemos que todo número entero a es racional, pues se puede representar como la fracción $\frac{a}{1}$. Para esto introducimos, los números fraccionarios, que surgen de la razón o cociente entre dos números enteros $r = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, con $b \neq 0$

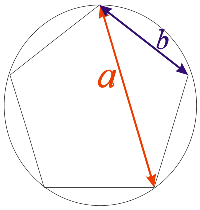
Los números racionales, tienen representación decimal exacta, esto significa que al dividir se obtiene un cociente y el resto es cero. Podemos decir que la escritura decimal de un número racional es, o bien un número decimal finito, o bien periódico.

POR EJEMPLO

$\frac{3}{5}=0{,}6 \quad y \quad \frac{5}{6}=0{,}8333...$ en ambos casos el resto de la división es cero, pero en el segundo ejemplo la cifra decimal 3 se repite indefinidamente, este tipo de números fraccionarios se llaman periódicos.

1.1.4. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los griegos, en el siglo VII a.C., descubrieron las magnitudes irracionales. Son números que no pueden ser expresados a través de una fracción. El origen de los números irracionales, fue motivado por el uso de cálculos geométricos que aparecían relacionados con el llamado **número áureo o número de oro**, que es el cociente entre la diagonal a, de un pentágono regular y el lado b del mismo.



Un número nada fácil de imaginar, que convive con la humanidad (porque aparece en la naturaleza y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño), es el llamado número de oro o también sección áurea, proporción áurea, razón áurea o número de Fidias.

Se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y artes.

Hombre de Vitruvio

Venus de Milo

El primer matemático en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides, quién demostró que este número no puede ser descripto como la razón de dos números enteros, es decir, que es un número irracional. Otros dos números irracionales muy conocidos son π y e . El número π se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Los antiguos egipcios (hacia 1600 a.C.) ya sabían que existía esta relación. Recién en el año 1761 Lambert demuestra formalmente que el número π es irracional.

El número irracional e aparece en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de Napier, no obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Bernoulli. En el año 1727 Euler comenzó a utilizar la letra e para identificar la constante.

1.1.5. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Definición

Todos los números racionales e irracionales forman el **conjunto de los números reales**, en símbolos **IR**.

Veamos la representación gráfica de todos los conjuntos explicados anteriormente.

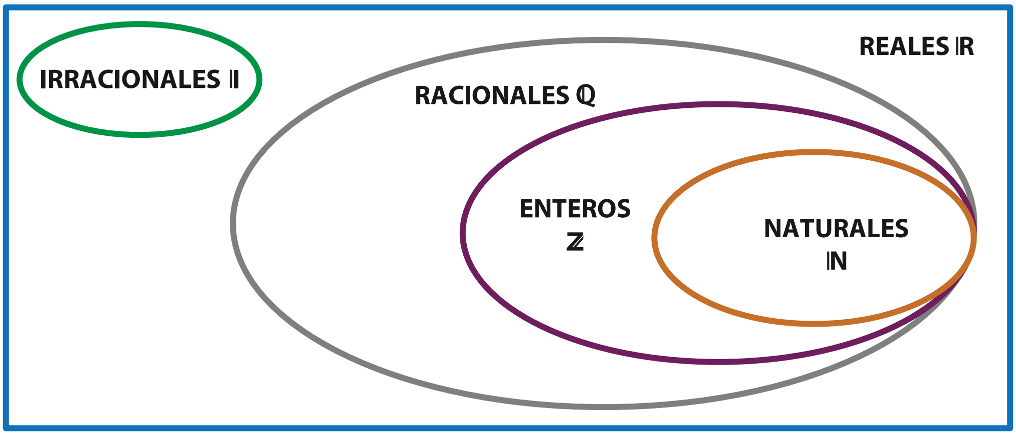


Gráfico Nº 1: Conjunto de los números reales

El diagrama anterior podemos esquematizarlo de la siguiente manera:

Números naturales: **N**
0 (cero)
Números negativos

Números enteros: **Z**

Números fraccionarios

Números racionales: **Q**

Números irracionales: **I**

Números reales: **R**

Esquema Nº 1: Conjunto de los números reales

Los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por **comprensión** utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos, o por **extensión** cuando se nombran todos sus elementos. Si trabajamos con conjuntos numéricos, esto último solo se puede aplicar a los números naturales y enteros, dado que es posible conocer en estos conjuntos el elemento anterior y el posterior.

POR EJEMPLO

Si llamamos A al conjunto formado por los números naturales menores que 6, lo escribimos:

- Por comprensión $A = \{ x / x \in \mathbf{IN} \wedge x < 6 \}$
- Por extensión $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vamos a ver relaciones y propiedades importantes entre conjuntos, que se necesitarán en el desarrollo del módulo: *Pertenencia e inclusión.*

PERTENENCIA

Definición

Cuando queremos establecer una relación entre elemento y conjunto.
La pertenencia se designa con el símbolo $\in$ y su negación $\notin$ indica la no pertenencia.

• En el ejemplo anterior: $2 \in A$ y $6 \notin A$

INCLUSIÓN

Definición

Se dice que un conjunto B está incluido en otro conjunto A, cuando todos los elementos de B pertenecen al conjunto A.
En símbolos: $B \subset A \Rightarrow B$ es un subconjunto de A

En el Gráfico Nº 1 podemos observar $\begin{cases} IN \subset Z \Rightarrow IN \text{ es un subconjunto de } Z \\ Q \subset IR \Rightarrow Q \text{ es un subconjunto de } IR \end{cases}$

POR EJEMPLO

$A \subset IN$ dado que todos los elementos de A pertenecen a IN, de la misma manera, podríamos decir que $A \subset Z$ dado que el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros.

EJERCITACIÓN

1. Si tenemos los conjuntos
$A = \{ x / x \in IN \wedge x < 5 \}$
$B = \{ x / x \in Z \wedge -5 \leq x \leq 5 \}$
$C = \{ x / x \in IN \wedge x < 3 \}$
$D = \{ x / x \in IN \wedge 3 < x < 6 \}$
podemos decir:

El elemento 5: $5 \notin A$; $5 \in B$; $5 \notin C$; $5 \in D$
El conjunto $A \subset B$; $C \subset A$; $D \not\subset A$

¿Habrán otras relaciones? ____
En caso afirmativo completar ______________________________________

2. Dados los conjuntos: $A = \{ x / x \in Z \wedge -5 \leq x < 3 \}$ y $B = \{ x / x \in Z \wedge x \leq 6 \}$

Marcar con una cruz verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, justificar la respuesta

	VERDADERO	FALSO		VERDADERO	FALSO
$4 \subset A$			$-1 \in A$		
$5 \in B$			$\{1, 4, 6\} \subset B$		
$B \in A$			$\{3, 6, 9\} \in A$		
$\{-5, -4, -3\} \subset A$			$A \subset B$		

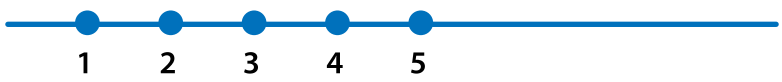
1.2. Representación de conjuntos numéricos en la recta

Hemos visto que los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por comprensión utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos, o por extensión ahora los representaremos en la recta numérica.

POR EJEMPLO

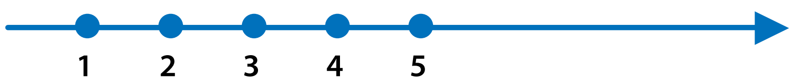
a. Para el conjunto $\mathbf{A = \{ x / x \in IN \wedge x < 6 \}}$ su representación en la recta es:

Gráficamente:



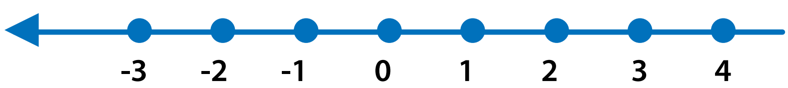
b. El conjunto $\mathbf{B = \{ x / x \in IN \}}$ está escrito por comprensión, y sus elementos son los números naturales, puede darse por extensión como $\mathbf{B = \{ 1, 2, 3, 4 \ldots \}}$ nótese que se han utilizado puntos suspensivos porque son infinitos los elementos del conjunto, en la recta se lo representa con una flecha, no obstante si se quiere seguir completando el conjunto lo podemos hacer dado que conocemos el sucesor.

Gráficamente:



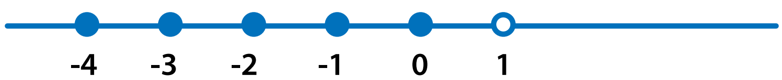
c. Consideremos $\mathbf{C = \{x / x \in Z \wedge x < 5 \}}$ los elementos del conjunto son números enteros.
Por extensión es $\mathbf{C = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}}$ son infinitos sus elementos por eso ponemos puntos suspensivos.

Gráficamente:



d. Sea $\mathbf{D = \{x / x \in Z \wedge -4 \leq x < 1\}}$ en el conjunto vemos que el 4 está incluido, no así el número 1. En la recta cuando no se incluye un número natural o entero, se indica dejando el círculo sin rellenar.

Gráficamente:



EJERCITACIÓN

1. Definir por extensión los siguientes conjuntos. Representar en la recta.

a) **A** = $\{ x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 8 \}$
b) **B** = $\{x / x \in Z \wedge -3 < x \leq 5 \}$
c) **C** = $\{x / x \in Z \wedge 6 \leq x \}$

2. Definir por comprensión los siguientes conjuntos dados por extensión en Z:

a) **A** = $\{ \ldots 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
b) **B** = $\{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$
c) **C** = $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \}$

1.3. Intervalo real

Si ahora definimos un conjunto sobre los números reales **D = $\{ x / x \in \mathbb{R} \wedge x < 6 \}$**, en este caso, es imposible nombrar los infinitos elementos de D, ni abusando de notaciones ya que no es factible nombrar dos reales consecutivos. Entre dos números cualesquiera de ellos hay infinitos números reales por más próximos que nos parezcan.

De aquí surge el concepto de **intervalo real: como una parte o subconjunto del conjunto IR.**

El conjunto D es el subconjunto que contiene a los infinitos reales menores a 6:
D = $]-\infty, 6[$ lo escribimos como un **intervalo abierto** de números reales que se representa con un corchete invertido.

Si los representamos en la recta numérica:

Sea **P = $\{x / x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x \leq 6 \}$** subconjunto que contiene a los infinitos reales desde el número –3 hasta 6. **P = $[-3, 6]$** lo escribimos como el intervalo cerrado de –3 a 6.
En la recta numérica se pueden representar:

La razón de clasificar a los intervalos como abiertos o cerrados está relacionada con el hecho de que el elemento pertenezca o no al subconjunto, si decimos por ejemplo:

$x < 5$, 5 no pertenece al conjunto

en este caso lo denominamos intervalo abierto en 5, pero si decimos

$x \geq 2$, 2 si pertenece al conjunto

lo denominamos intervalo cerrado en 2.
La notación que utilizaremos para designar los intervalos reales en general es corchete invertido cuando el intervalo es abierto en alguno de sus extremos; y corchete cuando el intervalo es cerrado en alguno de sus extremos.

$[a\,;\,b] = \{x/x \in IR: a \leq x \leq b\}$ **INTERVALO CERRADO**

$]a\,;\,b[= \{x/x \in IR: a < x < b\}$ **INTERVALO ABIERTO**

$]a\,;\,b] = \{x/x \in IR: a < x \leq b\}$ **INTERVALO SEMIABIERTO A IZQUIERDA**

$[a\,;\,b[= \{x/x \in IR: a \leq x < b\}$ **INTERVALO SEMIABIERTO A DERECHA**

Los intervalos se usarán con mucha frecuencia en la descripción del comportamiento de funciones y en la representación del conjunto solución de inecuaciones, entre otros.

EJERCITACIÓN

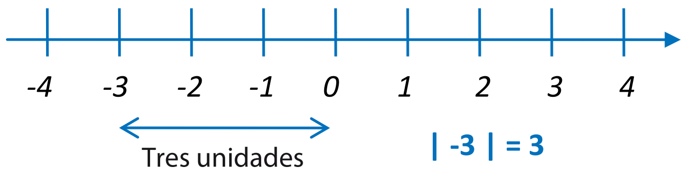
1. Expresar por comprensión los conjuntos dados por extensión en IR:

A =]- 5; 8] B = [- 4 ; 20] C = [3, ∞[D =]-∞, 10[

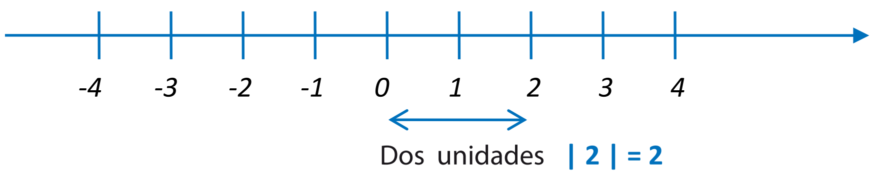
1.4. Valor absoluto

El valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del 0 (cero) sobre la recta numérica.

Se simboliza con barras, por ejemplo | - 3 | representa el valor absoluto de 3. Para obtener su valor, consideramos su distancia al 0. Por tratarse de una distancia es un número siempre positivo.



Si el número al que se le quiere calcular su valor absoluto es positivo, por ejemplo | 2 | el resultado nos da el mismo número por estar ubicado en la recta a la derecha del 0.



Para todo número real x:

$|x| = x$ si x es positivo, en símbolos $x \geq 0$

$|x| = -x$ si x es negativo, en símbolos $x < 0$

En la definición debemos tener en cuenta que el signo menos significa el opuesto del número.

POR EJEMPLO

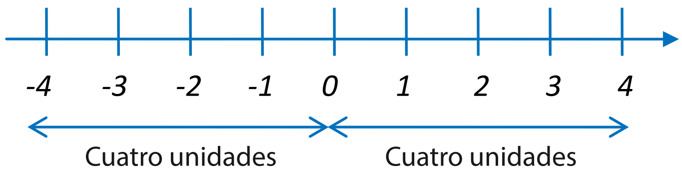
$|5| = x$ 5 es positivo, por lo tanto $|5| = 5$

$|-5| = -x$ -5 es negativo, por lo tanto $|-5| = -(-5) = 5$

El valor absoluto SIEMPRE nos da un número positivo

Podemos escribir conjuntos numéricos por comprensión, utilizando la notación de valor absoluto. En los siguientes ejemplos, consideramos a **x** como elementos de un conjunto.

Si tenemos $|x| = 4$ se trata de los números cuya distancia al cero es 4. Si lo graficamos vemos que hay dos números que cumplen esta condición.



x=-4 ó x=4
cumplen la condición

Escribimos el conjunto

- Por comprensión: $A = \{ x / x \in Z \wedge |x| = 4 \}$

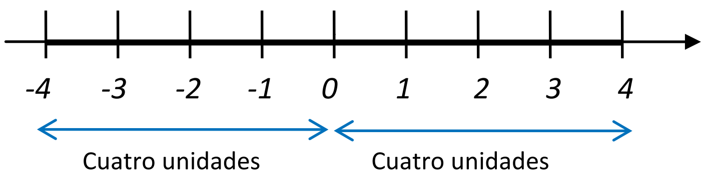
- Por extensión: $A = \{-4, 4\}$

Podríamos escribir el conjunto A sobre el conjunto de los números reales:

- Por comprensión: $A = \{x / x \in IR \wedge |x| = 4 \}$

- Por extensión: $A = [-4] \cup [4]$

Si en el ejemplo tenemos $|x| \leq 4$ se trata de los números cuya distancia al cero es menor o iguala 4



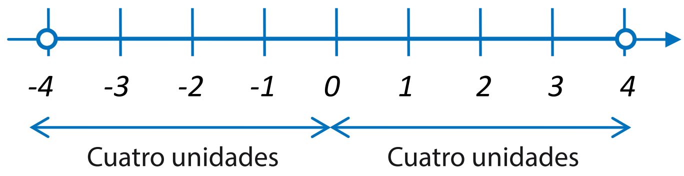
$\mathbf{-4 \leq x \leq 4}$

- Por comprensión: $A = \{x / x \in IR \wedge |x| \leq 4 \}$

- Por extensión: $A = [-4, 4]$ es un intervalo cerrado

Si ahora consideramos el caso $|x| < 4$ se trata de los números cuya distancia al cero es menor a 4.

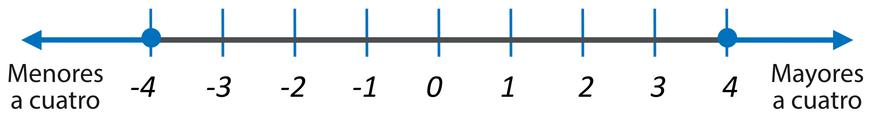
Si ahora consideramos el caso $|x| < 4$ se trata de los números cuya distancia al cero es menor a 4.



$$-4 < x < 4$$

Si tenemos $|x| \geq 4$, se trata de los números cuya distancia al cero es mayor o igual a 4.

Gráficamente:



$$x \leq -4$$
ó
$$x \geq 4$$

En este caso tenemos dos intervalos:

- Por comprensión: $A = \{x / x \in IR \wedge |x| \geq 4\}$
- Por extensión: $A =]-\infty, -4] \cup [4, \infty[$

Los ejemplos vistos se resumen en las propiedades de valor absoluto.

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \text{ ó } x = -k$$

Si: Para todo k positivo, para todo x : $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$

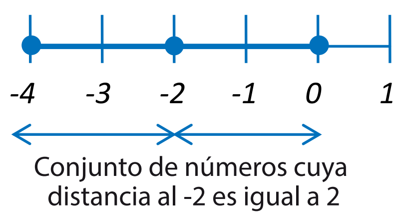
Para todo k positivo, para todo x : $|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \text{ ó } x \geq k$

Todo lo visto es válido para $|x - a| \leq k$ ó $|x + a| \leq k$ en el primer caso la distancia no es con respecto al cero, sino en relación al punto a; en el segundo caso se trata de la distancia de x al número (-a)

POR EJEMPLO

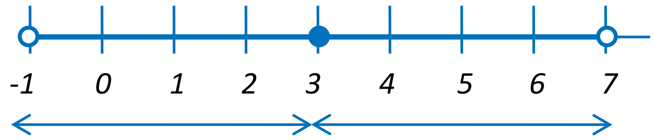
$\mathbf{A} = \{x / x \in IR \wedge |x + 2| \leq 2\}$ $\mathbf{B} = \{x / x \in |IR \wedge |x - 3| < 4\}$

Gráficamente para el conjunto A:



$$-4 \leq x \leq 0$$

Gráficamente para el conjunto B:



Conjunto de números cuya distancia al 3 es menor a 4

$\boxed{\mathbf{-1 < x < 7}}$

EJERCITACIÓN

1. Escribir los conjuntos A y B del ejemplo anterior por comprensión y extensión.

2. Determinar los elementos de los siguientes conjuntos:

$A = \{ x / x \in IR \wedge | x - 2 | < 5 \}$ $B = \{ x / x \in IR \wedge | x + 4 | < 2 \}$

3. Expresar los siguientes conjuntos como intervalo.

a) $A = \{x : x \in IR ; x > 6 \}$
b) $C = \{x: x \in IR; -4 < x < 4 \}$

1.5. Operaciones con números reales

Para operar correctamente con números reales, se repasaran algunas reglas básicas para realizar operaciones. Entre las cuales, tendremos en cuenta: m.c.m, M.C.D, suma, multiplicación, división, potenciación y radicación. Se prestará mayor atención a las operaciones con fracciones, dado que son las que presentan mayor dificultad.

> El mínimo común múltiplo (abreviado m. c. m), de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos

Dados dos o más números debemos descomponerlos en factores primos, luego el mínimo común múltiplo será el resultado de multiplicar los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

POR EJEMPLO

Calcular el m.c.m de 60, 45 y 15

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

15	3
5	5
1	

$60 = 2^2.3.5$ $45 = 3^2.5$ $15 = 3.5$

$\boxed{\text{m.c.m } (60, 45, 15) = 2^2 . 3^2 . 5 = 180}$

El máximo común divisor (abreviado M.C.D) de dos o más números naturales, es el mayor número natural que es divisor de todos ellos.

Dados dos o más números, se deben descomponer en factores primos, luego el M.C.D será el producto de los factores comunes elevados a la menor potencia.

POR EJEMPLO

En el ejemplo anterior: $60 = 2^2.3.5$ $45 = 3^2.5$ $15 = 3.5$

$$\boxed{\text{M. C. D } (60, 45, 15) = 3.5 = 15}$$

El 3 y el 5 son los factores comunes.

EJERCITACIÓN

1. Calcular el m.c.m y M.C.D para los números que se indican.

a) 32; 186 b) 36; 180

2. Las alarmas de tres relojes suenan cada 4 minutos, 10 minutos y 15 minutos, respectivamente. Si acaban de coincidir las tres alarmas dando la señal. ¿Cuánto tiempo pasará para que vuelvan a coincidir?

1.5.1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Definición

La adición o sustracción de dos fracciones de igual denominador es otra fracción de igual denominador, cuyo numerador es la suma o resta de los numeradores.

Es decir:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad \text{Con } b \neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$

b. $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

Definición

La adición o sustracción de dos fracciones de distinto denominador es otra fracción, cuyo denominador es el m.c.m de los números de los denominadores de la fracciones que cumple:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{p}{b}\right)a \pm \left(\frac{p}{d}\right)c}{p}$$

Llamamos “p” al m. c. m (b , d)
Para $b \neq 0$ y $d \neq 0$

c. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{6}{3}\right)4+\left(\dfrac{6}{2}\right)5}{6}=\dfrac{2.4+3.5}{6}=\dfrac{23}{6}=3{,}8\,\widehat{3}$

d. $\dfrac{7}{60}+\dfrac{2}{45}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{\left(\dfrac{180}{60}\right)7+\left(\dfrac{180}{45}\right)2+\left(\dfrac{180}{15}\right).1}{180}=\dfrac{3.7+4.2+12}{180}=\dfrac{41}{180}\approx 0{,}2\widehat{27}$

e. $\dfrac{2}{60}-\dfrac{8}{45}+\dfrac{1}{15}-2=\dfrac{\left(\dfrac{180}{60}\right)2-\left(\dfrac{180}{45}\right)8+\left(\dfrac{180}{15}\right)1-\left(\dfrac{180}{1}\right)2}{180}=\dfrac{6-32+12-360}{180}=\dfrac{-374}{180}=\dfrac{-187}{90}\approx -2{,}077$

1.5.2. MULTIPLICACIÓN

Definición

La multiplicación de dos fracciones es igual a otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a.c}{b.d}\quad \text{Con } b \text{ y } d\neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $\left(\dfrac{6}{5}\right).\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{6.4}{5.3}=\dfrac{2.4}{5}=\dfrac{8}{5}$

b. $(-100).\left(\dfrac{2}{400}\right).\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{-1000}{1200}=\dfrac{-5}{6}=0{,}8\,\widehat{3}$

1.5.3. DIVISIÓN

Definición

La división por un número racional se define como el producto por su inverso. Es decir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}\quad \text{Con } b\neq 0 \;\; c\neq 0 \;\text{ y }\; d\neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $4:\dfrac{2}{3}=4\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{4.3}{1.2}=\dfrac{12}{2}=\dfrac{6}{1}=6$

b. $\dfrac{8}{5}:\left(\dfrac{-2}{7}\right)=\dfrac{8}{5}\cdot\left(\dfrac{-7}{2}\right)=\dfrac{-56}{10}=-5{,}6$

c. $\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{-4}{25}\right)=\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{-25}{4}\right)=\dfrac{-5}{4}=-1{,}25$

1.5.4. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN

Sean a, b, c números reales, entonces se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributiva	$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$	
Identidad	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
Opuesto - Inverso	$a+(-a)=0$ opuesto	$a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$ inverso

EJERCITACIÓN

1. Resolver los siguientes ejercicios combinados

a. $\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right)=$

b. $\frac{11}{15}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1=$

c. $\frac{49}{5}:7+\left(3-\frac{11}{7}\right):\left(\frac{14}{49}+\frac{3}{7}:\frac{7}{12}\right)=$

d. $-\frac{3}{4}\left[\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=$

1.5.5. POTENCIACIÓN

Definición

Sean a un número real y n un número entero. Definimos la potencia *enésima* de *a*, como: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \ veces}$

Teniendo en cuenta la definición, podemos decir:

- $a^1=a$
- $a^0=1$ si $a\neq 0$
- $0^n=0$ si $n>0$
- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ si $a\neq 0$

. Conjuntos de los números reales .

Regla de signos

• Si el exponente es par, el resultado siempre tiene signo positivo.
• Si el exponente es impar, el resultado mantiene el signo de la base.

POR EJEMPLO

$(-2)^3 = -8$ $\qquad (-4)^2 = 16$ $\qquad 2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$

1.5.6. PROPIEDADES POTENCIACIÓN

Sean **m** y **n** enteros, las bases **a** y **b** reales y distintas de cero, en caso que el exponente sea cero o negativo:

Propiedad	Ejemplos
Producto de potencias de igual base: $a^m . a^n = a^{m+n}$	$(-2)^3 . (-2)^2 = (-2)^{3+2} = -32$
Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$	$(-2)^5 : (-2)^{-2} = (-2)^{5+2} = -128$
Potencia de otra potencia: $(a^m)^n = a^{m.n}$	$\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^3\right]^0 = 1$
Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación: $(a . b)^m = a^m . b^m$	$(2 . 3)^3 = 2^3 . 3^3 = 8.27$ $=216$
Distributiva de la potencia respecto de la división: $(a : b)^m = a^m : b^m$	$(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3 = 6$

1.5.7. RADICACIÓN

Definición

Dado un número real **a**, el número real **b** es su raíz enésima si se verifica que la potencia enésima de b es a: $b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$

. Conjuntos de los números reales .

La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales opuestos

$$\sqrt{49} = \pm 7 \quad \text{pues} \quad (\pm 7)^2 = 49$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad \text{pues} \quad (\pm 3)^4 = 81$$

La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el radicando

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{pues} \quad 4^3 = 64$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad \text{pues} \quad (-2)^5 = -32$$

La raíz de índice par de un número real negativo no es un número real, pues todo número real elevado a una potencia par es positivo.

1.5.8. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Propiedad	Ejemplos
Distributiva de la raíz respecto de la multiplicación: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{(8).(64)} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = 2.4 = 8$
Distributiva de la raíz respecto de la división: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$ **,con** $\mathbf{b \neq 0}$	$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
Raíz de otra raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2.3]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$
Radicando elevado a una potencia: $\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$	$\sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$ se obtiene lo mismo haciendo $\sqrt{4^5} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$

1.5.9. POTENCIAS CON EXPONENTE FRACCIONARIO

Definición

Toda raíz se puede escribir como potencia de índice fraccionario: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

De manera análoga: $a^{-\frac{n}{p}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}$ donde **p** es entero > 1

EJERCITACIÓN

1. Resolver aplicando propiedades de potenciación:

a) $(2^3 \,.\, 2^4) : 2^2 =$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 : 3^{-1} =$

c) $(4^3 \,.\, 4^{-1})^4 : (4^4 \,.\, 4^{-2}) =$

2. Resolver aplicando propiedades de radicación y cuando sea necesario, expresar como exponente fraccionario:

a) $\sqrt[6]{\left(-1+\frac{5}{4}\right)^3} : \sqrt[4]{1-\frac{65}{81}} =$

b) $\frac{1}{3}\sqrt{3} \,.\, \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \,.\, \left(\sqrt[8]{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

c) $(1-0{,}75)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

3. Expresar en forma de potencia, efectúe las operaciones y simplifique:

a) $\sqrt[8]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^2} =$

b) $\sqrt[9]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$

c) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt{x^4} =$

1.6. Razones y proporciones

Definición

La **razón** es el cociente de dos números. El primer número se llama antecedente; y el segundo, consecuente.

La razón la podemos representar como **a / b** siendo a el antecedente y b el consecuente; se lee **antecedente** es a **consecuente**.

POR EJEMPLO

La razón de 6 y 3 es 2 (6 / 3 = 2). Se lee 6 es a 3.

La **proporción** refiere a dos magnitudes que son proporcionales o guardan proporcionalidad cuando el crecimiento de una afecta al crecimiento de la otra. Si la relación es positiva crece una y crece otra o decrece una y decrece la otra, en este caso hablamos de proporcionalidad directa (espacio y tiempo, compra y gasto, etc.). En caso contrario, estamos ante la proporcionalidad inversa, en la cual el crecimiento de una magnitud implica el decrecimiento de la otra (trabajadores y tiempo que tardan en hacer una tarea).

Definición

Una proporción es una igualdad entre dos razones

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donde $a,d \rightarrow$ extremos $b,c \rightarrow$ medios con b y $d \neq 0$

Las proporciones tienen 4 términos: el primero (numerador de la primera fracción) y el cuarto (denominador de la segunda) se llaman **extremos**; y el segundo (denominador de la primera fracción) y el tercero (numerador de la segunda) se llaman **medios**.

1.6.1. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow a.d=b.c$$

POR EJEMPLO

Si queremos determinar el valor de x que satisface $\frac{x}{18}=\frac{9}{54}$ ocupemos la propiedad fundamental: x . 54 = 9.18; despejamos x —> $x=18.\frac{9}{54}=3$

1.6.2. APLICACIONES DE LAS PROPORCIONES

Las proporciones tienen múltiples usos y aplicaciones. Las más importantes son la regla de tres simple o compuesta y los porcentajes.

Definición

La **regla de tres simple** es una proporción o una igualdad de dos razones, es una operación por medio de la cual se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres. Esta regla puede ser directa o inversa, según cómo sea la relación de proporcionalidad entre las magnitudes que la conforman. Si es directa, se resuelve como una proporción normal.

POR EJEMPLO

a. Un ciclista recorre 150 km en 5 horas.
Cuántos km recorrerá en 7 horas.

Disposición de los datos

150 km	5 horas
X	7 horas

Horas y kilómetros son magnitudes directamente proporcionales.
Tenemos la proporción $\frac{150}{x}=\frac{5}{7}$ despejamos: x = 210 km. Si es inversa, se intercambia un medio con un extremo y se procede como en cualquier proporción.

b. Si 12 obreros se tardan 30 días en acabar una obra. ¿Cuántos obreros se necesitarán para acabar la misma obra en 24 días?

Disposición de los datos

12 obreros	30 días
X	24 días

Obreros y días son magnitudes inversamente proporcionales. Tenemos la siguiente proporción:

$\frac{12}{x} = \frac{24}{30}$ Se ha invertido una de las razones, despejamos x = 15 obreros

Para calcular un **porcentaje** o tanto por ciento (%) debemos hacer una regla de tres simple directa. De las cuatro cantidades que la forman, siempre conocemos tres: la cantidad que queremos transformar en tanto por ciento, el total con el que se compara y el total con el que se compara el tanto por ciento (100).

POR EJEMPLO

Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $120.000, nos hacen un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

La proporción la podemos plantear $\frac{120.000}{100} = \frac{x}{7,5}$ o como regla de tres simple:

100% $\longrightarrow$ 120.000

7,5 % $\longrightarrow$ x   resolvemos: $x = \frac{7,5 \,.\, 120.000}{100} = 9000$ el descuento es de $9.000

Se debe pagar $111.000

Para obtener directamente este valor, lo podemos plantear teniendo en cuenta que debemos pagar.

100% - 7,5% = 92,5 % del valor del vehículo

100% $\longrightarrow$ 120.000

92,5 % $\longrightarrow$ x   resolvemos: $x = \frac{92,5 \,.\, 120.000}{100} = 111.000$

Se debe pagar $111.000

EJERCITACIÓN

1. Un terreno se remata dividido en 36 lotes iguales. Se presentaron sólo tres interesados: el primero adquirió un cuarto del terreno total; el segundo un tercio y el tercero dos novenos. ¿Cuántos lotes adquirió cada uno? ¿Cuántos lotes quedaron sin vender?

2. De un stock de 1200 artículos, se han vendido 735. ¿Qué porcentaje de artículos quedo sin vender?

3. Se han pagado $ 1.260 por una entrada para un partido adquirida en la reventa. Si el revendedor ganó el 180% de su valor original ¿Cuánto costaba la entrada en ventanilla?

4. Un tanque destinado para riego, contenía en enero 500.000 metros cúbicos de agua y estaba lleno. En abril la reserva se redujo en un 20% de su capacidad y en el mes de agosto un 30% de lo que quedaba. ¿Cuántos litros tenía el tanque en abril, y cuántos quedaron en agosto?

1.7. Síntesis

Intervalos

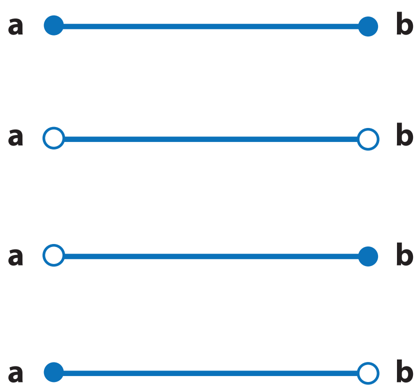
Se utilizan solamente cuando se trata del conjunto de números reales. Se clasifican en:

Intervalo cerrado
$[a\,;b] = \{x/x \in IR: a \leq x \leq b\}$

Intervalo abierto
$]a\,;b\,[= \{x/x \in IR: a < x < b\}$

Intervalo semiabierto a izquierda
$]a\,;b] = \{x/x \in IR: a < x \leq b\}$

Intervalo semiabierto a derecha
$[a\,;b[= \{x/x \in IR: a \leq x < b\}$



Operaciones con números reales

Potenciación
Sean a un número real y n un número entero. Definimos la potencia n-ésima de a, como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad veces}$$

Propiedades:
Sean **m** y **n** enteros, las bases **a** y **b** reales y distintas de cero, en caso que el exponente sea cero o negativo:

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)\ n = a^{m.n}$

$(a\,.\,b)^m = a^m.\, b^m$

$(a : b)^m = a^m : b^m$

Radicación
Dado un número real a, el número real b es su raíz enésima si se verifica que la potencia enésima de b es a.

$$\sqrt[n]{a} \iff b^n = a$$

Propiedades:
Sean **m** y **n** enteros, las bases a y b reales y distintas de cero, en caso que el exponente sea cero o negativo:

$\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ con $b \neq 0$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

El orden de las operaciones

Se deben respetar con el uso de la calculadora

Las sumas y las restas que no se encuentran dentro de un paréntesis o dentro de una raíz son operaciones que separan en términos. En cada término resolvemos primero las operaciones que encierran los paréntesis

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}} : \frac{1}{6} - \frac{5}{3}.\sqrt{\frac{9}{4}} + 8\,(4-5) =$$

$$\sqrt[5]{32} : \frac{1}{6} - \frac{5}{3}.\frac{3}{2} + 8\,(-1) =$$

$$2 : \frac{1}{6} - \frac{5}{2} - 8 = 12 - \frac{5}{2} - 8 = \frac{3}{2}$$

Cuando hay llaves que encierran corchetes y estos encierran paréntesis, se resuelven:

1° Las operaciones entre paréntesis
2° Las operaciones entre corchetes
3° Las operaciones entre llaves

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}:\left(2+\frac{1}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 + (-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}:\left(\frac{9}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{27}{8} + (-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}.\frac{4}{9}\right]\right\} =$$

$$\frac{27}{8} + (-1)\left\{2-\frac{2}{3}\right\} =$$

$$\frac{27}{8} + (-1)\left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{27}{8} - \frac{4}{3} = \frac{49}{24}$$

Las operaciones bajo el símbolo radical se tratan como si estuvieran entre paréntesis.

Proporciones y porcentajes

Para calcular el porcentaje de un número **a** hacemos:

$$\frac{x}{100}.a$$

Para calcular un porcentaje se plantea la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a.d = b.c$$

La proporción la podemos trabajar con regla de tres simple.

El 32% de 4500 es…

$$\frac{32}{100}.4500 = 1440$$

¡OFERTA!
Computadora $5250 sólo por hoy
Precio de lista: $7800
¿Qué porcentaje del precio de lista vamos
a pagar?

$$\frac{5250}{7800} = \frac{x}{100} \rightarrow \quad 5250\,.\,100 = 7800.\,x \rightarrow \; x = 67{,}3\%.$$

Pagué $3.200 con un aumento del 25%
¿Qué cantidad representa el aumento?

Proporción $\frac{3200}{125} = \frac{x}{25}$

125% $\longrightarrow$ 3200

25% $\longrightarrow$ $x = \frac{3200}{125\%}.25\% = 640$

El aumento es de $640

1.8. Ejercitación para el estudiante

Contenidos conceptuales:

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES

Conjuntos numéricos. Representación como intervalo en la recta numérica. Operaciones con números reales. Razones y proporciones. Problemas de Aplicación

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

- Aplicar el concepto de intervalo en la recta numérica
- Operar con números reales en ejercicios concretos
- Utilizar la calculadora en la resolución de ejercicios
- Desarrollar criterio lógico en el uso de la calculadora
- Calcular porcentajes en situaciones de la vida cotidiana
- Reconocer porcentaje como una relación entre magnitudes directamente proporcionales

Ejercicio 1:

Escribir con notación de intervalo los siguientes conjuntos numéricos dados por comprensión:

$A = \{ x / x \in IR \wedge -6 < x < 3 \}$ $\quad$ $B = \{ x / x \in IR \wedge x \leq 9 \}$

$C = \{ x / x \in IN \wedge 10 \leq x < 20 \}$ $\quad$ $D = \{ x / x \in IR \wedge -4 \leq x \leq 3 \}$

Ejercicio 2:

Con los números 20; 3; -20; -5:
a) Combinarlos para formar todas las fracciones posibles
b) Completar el cuadro

Cociente mayor a uno	Cociente menor a uno

c) Ordenar los números fraccionarios de menor a mayor

Ejercicio 3:

Marcar con una cruz verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, justificar la respuesta.

	Verdadero	Falso	Respuesta correcta
$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{0} = 0$			
$\left(3^{-2} - 2^{-3}\right)^{-1} = 72$			
$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$			
$\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{6} = 7^{3}$			
$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\sqrt{81}} = 348$			

Ejercicio 4:

Resolver utilizando calculadora:

a) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \frac{2^{3}}{3^{2}}} =$

Rta: 1

b) $\left[\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 1}{1 - \dfrac{2}{3 - \frac{1}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}} =$

Rta: 1/2

c) $\dfrac{\frac{11}{49} - \frac{3}{7}}{\frac{11}{49} + \frac{3}{7}} =$

Rta : -5/16

d) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}=$

Rta: 5/3

e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=$

Rta: 5/6

f) $\sqrt[6]{\left(-1+\frac{5}{4}\right)^{3}}:\sqrt[4]{1-\frac{65}{81}}=$

Rta: 3/4

Problemas de aplicación

Ejercicio 5:

a) Una moto cuyo precio era de 15.000, cuesta en la actualidad 250 más.
¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Rta: 1,66 %

b) Al adquirir un vehículo cuyo precio es de \$120.000, nos hacen un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

Rta: \$111.000

c) Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de \$3.600.
¿Cuál era el precio inicial?

Rta: \$3000

d) Después de rebajar el precio de una computadora un 8%, me ha costado \$2.596
¿Cuál era su precio inicial?

Rta : \$2821,74

e) Un juguete vale en una juguetería 140 pesos. Si durante la semana previa al Día del niño el juguete sube un 22% y una vez que éste ha pasado, baja un 9%. Calcule su precio final.

Rta: \$155,428

f) Si compro un celular de \$4200 y me lo rebajan un 20% por pago contado. Pero después me cobran el 21% de I.V.A. ¿Cuánto me costó?

Rta: \$4065,6

MÓDULO 2

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

MÓDULO 2: ***ECUACIONES E INECUACIONES***

ECUACIONES E INECUACIONES

Contenidos conceptuales

Ecuaciones algebraicas de primer grado. Ecuaciones algebraicas de segundo grado. Fórmula resolvente. Inecuaciones de primer grado. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

• Plantear las ecuaciones de primer y segundo grado en casos concretos
• Encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas
• Resolver problemas planteando la inecuación correspondiente
• Interpretar las soluciones encontradas
• Expresar por medio de intervalos las inecuaciones

"De la época babilónica existe más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas. Abarcan un período que va desde el año 2100 a.C., época del famoso Rey Nabucodonosor. De esas tablillas, unas 300 se relacionan con matemáticas, unas 200 con tablas de varios tipos: de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc. Los problemas que se plantean tratan acerca de cuentas diarias, contratos, préstamos, interés simple y compuesto. En Geometría tenían conocimiento del Teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes; en Álgebra hay problemas de segundo e incluso de tercero y cuarto grado; también resolvían sistemas de ecuaciones: existe un ejemplo de un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas."

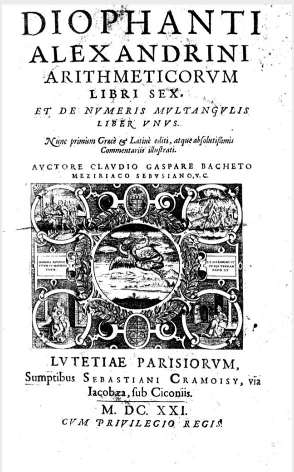
Texto extraído de: Historia e historias de Matemáticas- Mariano Perero- Grupo Editorial Iberoamérica.

En 1545 el matemático italiano Gerolamo Cardano publicó una solución algebraica para las ecuaciones de tercer grado en función de sus coeficientes y NiccoloTartaglia la desarrolló. Poco después, Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, encontró una solución para las ecuaciones de cuarto grado. En 1635 el matemático y filósofo francés René Descartes publicó un libro sobre la teoría de las ecuaciones, incluyendo su regla de los signos para saber el número de raíces positivas y negativas de una ecuación. En 1750 el matemático suizo Gabriel Cramer encontró una regla para la resolución de sistemas usando determinantes.

Contemporáneo a Cramer, el matemático francés Juan Le Rond D'Alembert, demostró que una ecuación de grado n tiene n raíces.

A continuación mostramos nuevamente el texto y luego el planteo para llegar a la respuesta:

DIOFANTO


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

En lengua vernácula	En lenguaje algebráico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vellos cubriose su barbilla.	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su parde a la tierra.	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	4
Dime, caminante ¿Cuántos años vivió Diofanto?	
	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}$

Para terminar, responda las siguientes preguntas:

a) En el contexto del problema qué significa x.

b) ¿Qué interpretas por $\frac{x}{2}$?

c) ¿Cuál es la expresión que te indica la edad que tenía Diofanto al perder a su hijo?

d) ¿Qué te permite conocer la expresión $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$?

En la última fila hemos llegado a una ecuación,traduciendo al lenguaje algebraico una expresión verbal, para luego abordarlo matemáticamente.

2. Ecuaciones

Definición

Una ecuación es una igualdad entre expresiones que contienen uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas que se son representados por medio de letras.

Nota: Las incógnitas se representan en general por las últimas letras del alfabeto, las llamaremos x, y, z.

POR EJEMPLO

a) $3y^2 - \sqrt{2} = -\frac{y^2+1}{y}$

b) $3x + 2xy - 4 = 8$

c) $3x^3\text{-}2x = \sqrt{x} - \frac{3}{2} = 3x$

d) $4x + 1 - 4x = 4$

Observemos en este ejemplo las partes de una ecuación:

$$\overbrace{5x - 10}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{x + 6}^{\text{Segundo miembro}}$$

Términos algebraicos
o términos en "x"

Si bien existen diversos tipos de ecuaciones, como lo son las algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, particularmente nos abocaremos a las ecuaciones algebraicas en una incógnita.

2.1. ECUACIONES ALGEBRAICAS CON UNA INCÓGNITA

Definición

Las ecuaciones algebraicas, son las que resultan de efectuar a las incógnitas operaciones como: adición, sustracción, potenciación y radicación

EJEMPLOS DE ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

a) $3y^2 - \sqrt{2} = -\dfrac{y^2+1}{y}$

b) $3x^3 - 2x = 6$

c) $\sqrt{x} - \dfrac{3}{2} = 3x$

2.1.1. Clasificación de ecuaciones algebraicas con una incógnita

ECUACIONES ALGEBRAICAS EN UNA VARIABLE O INCÓGNITA

- **Racionales**
  - Enteras o polinómicas. Los exponentes de la variable o incógnita son números naturales.
    - $x^2 - 2x = -1$
  - Fraccionarias. Al menos uno de los exponentes de la variable o incógnita es un número entero negativo.
    - $\dfrac{3x}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x} = 2x^2$
- **Irracionales**
  - Al menos una de las incógnitas figura bajo el signo radical o presenta exponente fraccionario.
    - $\sqrt{2x} - 3 = \dfrac{1}{4} + x$

2.2. Ecuaciones polinómicas

Si igualamos a cero un polinomio P(x), la expresión P (x) = 0 se llama ecuación asociada al polinomio. Resolver una ecuación P(x) = 0 es hallar un conjunto de números reales (o complejos) que satisfacen esta igualdad.

Dicho conjunto se llama conjunto solución de la ecuación dada, y sus elementos se llaman raíces de la ecuación. En símbolos:

$$\textbf{a es raíz de P (x)} \Leftrightarrow \textbf{P (a) = 0}$$

Como trabajamos solo con números reales, el conjunto solución S, lo indicamos:

$$S = \{ a \in IR \,/\, P(a) = 0 \}$$

Las ecuaciones siempre se pueden igualar a cero, sus soluciones son los ceros o raíces de $P(x)$ y, según el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las no reales. Cuando la solución nos dé un complejo, diremos que **no tiene solución en el conjunto de los números reales.**

POR EJEMPLO

$3x^3 - 2x = 6$ que también puede ser escrita $3x^3 - 2x - 6 = 0$, correspondiendo a una ecuación de tercer grado en x, que presenta a los sumo tres raíces reales.

$3(t+1) - (t^2+1) = 2t$ cuya expresión equivalente, luego de operar es la siguiente ecuación de segundo grado en t, $-t^2 + t + 2 = 0$ que admite a los sumo dos raíces reales.

Cuando la solución no es inmediata recurriremos a la factorización y a las propiedades de las operaciones con números reales para encontrar las incógnitas.

2.3. ECUACIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Definición

Las ecuaciones polinómicas de primer grado (o lineales) con una incógnita tienen la forma:
a x + b = 0, siendo a y b números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a\,x + b}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax es el término lineal

b es el término independiente

2.3.1. Resolución de ecuaciones

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como las operaciones con expresiones algebraicas.

Sea la ecuación $3\,(x+2) - x = 0$

Aplicando distributiva de la multiplicación respecto a la adición. → $3x + 6 - x = 0$

Utilizando conmutativa de la adición. → $3x - x + 6 = 0$

Operando con los términos semejantes en x, se llega a la expresión general de la ecuación de primer grado. → $2x + 6 = 0$

Utilizando la ley uniforme, la del inverso aditivo y la del elemento neutro para que quede en el primer miembro solamente el término en x, resulta: → $2x + 6 + (-6) = 0 + (-6)$

$2x + 0 = -6$

Aplicando la ley uniforme , la del inverso multiplicativo y la del elemento neutro de la multiplicación queda: → $\frac{1}{2} \cdot 2x = -6 \cdot \frac{1}{2}$

$1 \cdot x = -3$

La solución de la ecuación es → $\boxed{x = -3}$

Para verificar la solución de la ecuación:

• Se reemplaza el valor hallado para x, en la ecuación original

• Se resuelve cada miembro.

• Si el valor hallado es solución de la ecuación, se debe llegar a una identidad.

Particularmente para el ejemplo anterior resulta si x = = - 3 —> 3(-1) +3 = -3 +3 = 0

Al llegar a una identidad, se concluye que $x = -3$ es solución y el conjunto solución de la ecuación es $S = \{-3\}$.

Una ecuación lineal puede tener una, infinitas o ninguna solución.

En el siguiente cuadro vemos las condiciones para cada tipo de solución:

$a \neq 0$ y $b \neq 0$	$a = 0$ y $b = 0$	$a = 0$ y $b \neq 0$
↓	↓	↓
$x = \frac{b}{a}$	$0 \cdot x = 0$	$0 \cdot x = b$
↓	↓	↓
Presenta una única solución que la satisface.	Tiene infinitas soluciones porque para cualquier número real x se obtiene 0 = 0 que es una identidad.	Esta ecuación no tiene solución porque la igualdad obtenida NO se cumple para ningún número real x; ya que para cualquier valor de x se obtendría $0 = b$ lo cual es un *absurdo*.
↓	↓	↓
Ecuación determinada	**Ecuación indeterminada**	**Ecuación sin solución**

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a)

$$2x + 3 = 5$$
$$2x + 3 - 3 = 5 - 3$$
$$2x = 2$$
$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}2$$
$$x = 1$$

Una vez resuelta la ecuación, verifique que el valor obtenido es solución de ella.
La ecuación $2x + 3 = 5$ tiene **solución única $x = 1$.**

b)

$$3x - x = 2x$$
$$2x = 2x$$
$$2x - 2x = 0$$
$$0 \cdot x = 0$$

En este ejemplo observamos que hemos obtenido: $0 \cdot x = 0$
Si se reemplaza x por cualquier número real, se obtiene una identidad, o sea que la ecuación tiene **infinitas soluciones** (todos los reales son solución de ella).

c)

$$x + 5 = x$$
$$+ 5 - 5 = x - 5$$
$$x = x - 5$$
$$x - x = -5$$
$$0\,x = -5$$

Se obtiene: $0\,x = -5$
¿Cuántas soluciones tiene esta igualdad?
Cualquiera sea el valor que tome x el producto es nulo y distinto de -5.
No tiene solución.

d)

$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$3\ (x+1) = 5\ (3x - 9)$$
$$3x + 3 = 15x - 45$$
$$3 + 45 = 15x - 3x$$
$$48 = 12x$$
$$x = 4$$

La solución es $x = 4$, que pertenece al conjunto de los números reales; por lo tanto esta ecuación tiene solución en R.
solución única $x = 4$

2.3.2. Aplicaciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Cuando el planteo de un problema se puede “traducir” a una ecuación, para resolverlo tiene que considerar los siguientes pasos:

1. Leer e interpretar el enunciado, para poder identificar datos e incógnita determinando las relaciones que existen entre ellos.

2. Realizar un dibujo, cuando sea posible, en el que se señalan los datos e incógnitas.

3. Escribir la ecuación que corresponda a la relación encontrada entre los datos y la incógnita. Para ello es necesario identificar cuál es la incógnita o valor desconocido en el problema y asignarle una letra cualquiera.

4. Resolver la ecuación.

5. Verificar si la solución obtenida verifica la ecuación planteada y responde a las condiciones del problema.

6. Escribir la respuesta acorde al problema.

Lo ilustramos en ejemplos de situaciones que se puedan expresar, analizar y resolver mediante una ecuaciones.

POR EJEMPLO

1. En una fábrica de aceite, se quiere enviar éste en camiones cisterna a un almacén. Los encargados del almacén solicitan que los camiones lleguen exactamente a las 17 hs Si los camiones viajaran a 80 km/h, llegarían con una hora de adelanto (a las 16hs). Pero si viajaran a 60 km/h, llegarían con una hora de retraso (a las 18hs). ¿A qué distancia está la fábrica de aceite del almacén?

A partir de los pasos para resolver un problema:

Lee e interpreta el enunciado, para poder identificar datos e incógnita y determinar las relaciones que existen entre los mismos para escribirlas en lenguaje algebraico.

"Distancia" es igual al producto de "velocidad" y "tiempo" $d = v \cdot t$

como la distancia recorrida es la misma en ambos casos podemos deducir que:
$v_1 \cdot (t-1) = v_2 \cdot (t+1)$

quedando planteada una ecuación donde "t" es nuestra incógnita.

$80 \cdot (t-1) = 60 \cdot (t+1)$ Al despejar t se tiene: $t = 7$

Para hallar respuesta al problema, reemplazamos t en cualquiera de las ecuaciones anteriores ya que d = v .t ---> d = 80 km/h . 6 hs = 60 km/h . 8 hs = 480 km

La respuesta al problema es que el almacén se encuentra a 480 km del molino.

2. A una cena de fin de año organizada por un club, asistieron 400 socios entre adultos y menores. Si el costo de la tarjeta de los adultos era de \$ 35, y el de los menores \$20, ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo, si en total el club recaudó \$12.500?

• Si se designa con x al número de socios adultos (una de las incógnItas del problema), entonces, el número de menores será: 400 –x .

• Cada adulto pagó \$35, es decir que el total pagado por ellos es: 35 x

• Cada menor pagó \$20, el total abonado por ellos fue: 20 (400 - x)

• La expresión en relación a la recaudación: $35x + 20 \quad (400 - x) = 12500$

• Al resolver la ecuación tenemos que $x = 300$

• Sólo resta verificar la solución e interpretarla en términos del problema:

$$35 \cdot 300 + 20\left(400 - 300\right) =$$
$$10500 + 2000 = 12500$$

Asistieron entonces 300 adultos y 400 - 300= 100 menores.

3. Consideremos en el problema anterior que la recaudación del club fue de \$10.995. En este caso ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo?

$35x + 20 \quad (400 - x) = 12500$

La ecuación que corresponde a este nuevo enunciado es:

$35x + 20\,(400 - x) = 10995$ => $x = 199,\widehat{6}$ Número de adultos

Con este valor, calculamos el número de menores que sería $x = 200,\widehat{3}$. Desde el punto de vista matemático la solución es correcta, pero carece de sentido cuando se piensa en el contexto del problema por tratarse de un número de personas.

Esto pone en evidencia dos cosas:

→ La necesidad de verificar si los resultados obtenidos son correctos desde el punto de vista matemático.

→ Comprobar si la respuesta es razonable en términos del problema planteado.

4. En un rectángulo de 42cm de perímetro la altura es 5cm mayor que un tercio de la base. ¿Cuál es la longitud de la base?

$h = \frac{x}{3} + 5$

x

Si decimos que x es la longitud de la base, entonces la expresión de la altura en relación a la medida de la base es: $h = \frac{x}{3} + 5$.

La ecuación que permite calcular la longitud de la base teniendo presente el perímetro de la figura es:

Cuya resolución es: $\underbrace{2x}_{\text{base}} + \underbrace{2\left(\frac{x}{3} + 5\right)}_{\text{altura}} = \underbrace{42}_{\text{perímetro}}$

$$2x + 2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = 42$$

$$\left(2x + \frac{2}{3}x\right) + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 - 10 = 42 - 10$$

$$\frac{3}{8}.\frac{8}{3}x = 32.\frac{3}{8} \quad \text{Con lo cual } x = 12$$

Se verifica la ecuación y analiza la coherencia del valor calculado con la situación:

$$2 \cdot 12 + 2\left(\frac{12}{3} + 5\right) = 24 + 2(4 + 5) = 24 + 18 = 42$$

La respuesta del problema es: **La longitud de la base es de 12cm.**

Ahora si se puede saber la edad de Diofanto.

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

¿Cuántos años tenía?

EJERCITACIÓN

1. Expresar simbólicamente la ecuación correspondiente:

a) Un número más su quinta parte es 12.

b) Un poste tiene bajo tierra 2/7 de su longitud y la parte emergente mide 8 metros.

c) El perímetro de un cuadrado es de 12 m.

d) En una biblioteca hay 23 libros distribuidos en dos estantes, en el de abajo hay 7 libros menos que en el de arriba.

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a) $2(3x-2)-(x-3)=8$

b) $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$

c) $\frac{3}{4}\,(2x+4)=x+19$

d) $-2(x+1)+3(x-2)=x+6$

e) $\frac{5}{x+7}=\frac{3}{x-2}$

3. Marque la respuesta correcta

a) La expresión:

$\frac{13}{3}x-5\;(x+2)=\frac{4x}{3}-2(\;x+1)$ es verdadera para:

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x=-1$ d) *ningún número real* e) *todo número real*

b) El 20% de un número sumado con el doble se expresa:

a) x b) 2x c) 2,2 x d) 22x e) 220x

c) Una columna está enterrada las dos quintas partes de su longitud, las dos séptimas partes del resto está bajo agua y sobresal en 3m. ¿Cuál es la longitud de la columna?

a) 6m b) 7m c) 9m d) 9,5m e) 10m

4. Resuelve los siguientes problemas de aplicación:

a) Un comerciante hace un testamento de la siguiente forma: dos tercios a su único hijo; un quinto, a una familia muy amiga, y los 49000 restantes, a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende el total de la herencia?

b) En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si el total es de 156 personas.

c) Durante su primera hora de trabajo, el dueño de un puesto de revistas vendió la cuarta parte de los diarios que tenía y, durante la segunda hora, vendió la sexta parte de los que le quedaban. Contó los ejemplares y notó que aún había 25. ¿Cuántos diarios tenía al principio?

2.4. INECUACIONES LINEALES

Veamos los siguientes ejemplos

> **a)** Importante empresa Metalúrgica seleccionará ingeniero Mecánico o Electromecánico:
> Disponibilidad horaria
> Edad: 25 a 35 años
> **b)** El número de personas presentes sobrepasa los 1000.

¿De qué manera podemos expresar los enunciados anteriores en forma algebraica?

En estos casos, las expresiones no pueden ser traducidas al lenguaje algebraico a través de una igualdad, sino que dan lugar a una **desigualdad**.

Estas expresiones algebraicas, se llaman **inecuaciones**.

Para los ejemplos anteriores tenemos:

a) si designamos con la letra "e" a la edad, en lenguaje algebraico:

$\mathbf{25 \leq e \leq 35}$

b) Si designamos con "n" al número de personas, en lenguaje algebraico:

$\mathbf{n \geq 1000}$

Definición

> **Una inecuación lineal es una desigualdad que se puede escribir:**
>
> $ax + b < c \qquad ax + b \leq c \qquad ax + b > c \qquad ax + b \geq c$
>
> **donde a, b y c son números reales con a ≠ 0**

$$\underbrace{a\,x + b}_{\text{Primer miembro}} < \underbrace{c}_{\text{Segundo miembro}}$$

Al igual que para una ecuación, *resolver* una inecuación también es hallar los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Este conjunto de valores que la verifican se llama **conjunto solución.**

2.4.1. Propiedades de las desigualdades

a) Si en ambos miembros de una desigualdad sumamos o restamos un mismo número, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido
En símbolos:

$\mathbf{a < b \Rightarrow a.c < b.c}$

POR EJEMPLO

$$3 < 8 \Rightarrow 3+2 < 8+2$$

b) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número positivo, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c < b.c$ si $c > 0$
$a < b \Rightarrow a : c < b : c$ si $c > 0$

POR EJEMPLO

$$11 > 9 \Rightarrow 11.4 > 9.4 \qquad 44 > 36$$

c) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número negativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c > b.c$ si $c < 0$
$a < b \Rightarrow a : c > b : c$ si $c < 0$

Si $4 < 12$ $\frac{4}{(-2)} > \frac{12}{(-2)}$ ó $-2 > -6$ si multiplicamos miembro a miembro por (-1)

cambia el sentido de la desigualdad y nos queda $2 < 6$
Estas propiedades también se extienden a las relaciones ≥ o ≤.

Veremos ahora como se aplicar estas propiedades para resolver una inecuación.

2.4.2. Resolución y representación del conjunto solución

POR EJEMPLO

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x-3 > 0$. Trabajamos como si se tratara de una igualdad y despejamos x

$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ Hemos obtenido el conjunto solución:

$S = \{x : x \in R \ , \ x > 3/2\}$

Gráficamente:

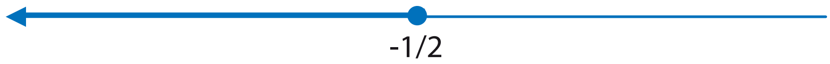
Otra forma de expresar el conjunto solución es usando la notación de **intervalo**:
$S =]3/2 , \infty[$

b) $-2x + 5 \geq 6$

$-2x \geq 6 - 5$

$-2x \geq 1 \Rightarrow -x \geq \frac{1}{2}$ multiplicamos ambos miembros por (-1) $\Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

Gráficamente:



Como intervalo: $S =]-\infty, -1/2]$

Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

POR EJEMPLO

Una furgoneta pesa 875 kg. La capacidad máxima de carga, teniendo en cuenta su peso no puede superar 1.315 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

Primero traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta + peso de 4 cajones menor o igual que 1.315 kg

$$875 + 4x \leq 1315$$

Al resolver la inecuación se obtiene la inecuación: $x \leq 110$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 110 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo]0, 110].

EJERCITACIÓN

1. Resuelve las siguientes inecuaciones, representa el conjunto solución en la recta real y exprésalo como intervalo:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$

b) $5 + 3x \leq 4 - x$

c) $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$

d) $x + 8 \leq 3x + 1$

2. Resuelve los siguientes problemas de aplicación

a) Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7 cm. ¿Qué se puede decir de su perímetro p?

b) Dados los siguientes segmentos A y B, cuyas longitudes son:

long A = 2x-1 A

long B = x +1 B

Comparando ambas longitudes ¿Qué valores puede tomar x?

2.5. ECUACIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Definición

Las **ecuaciones polinómicas de segundo grado** (o cuadráticas) con una incógnita tienen la forma: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, siendo a, b y c números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a\,x^2 + bx}^{\text{Primer miembro}} + \overbrace{c = 0}^{\text{Segundo miembro}}$$

- ax^2 es el término cuadrático, y a su coeficiente
- b x es el término lineal y b su coeficiente
- c es el término independiente

Para resolver una ecuación cuadrática con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como factorización.

Observación: Dado que toda ecuación de este tipo se puede igualar a cero, hallar la solución de una de ellas es lo mismo que hallar las raíces de un polinomio de segundo grado.

POR EJEMPLO

Son ecuaciones de segundo grado:

- $x^2 + 16 = 0$
- $3x^2 - 48 = 0$
- $x^2 - 7x = 18$
- $9x^2 - 6x = -1$

Surge entonces la pregunta: *¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado?*

2.5.1. Resolución

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ (o *raíces* de un polinomio de segundo grado) pueden obtenerse a partir de los coeficientes a, b, c con la siguiente expresión:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Donde: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\qquad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

> **Importante:** Si uno de los términos no aparece en la ecuación es porque su coeficiente es nulo, en ese caso conviene completar la ecuación para aplicar la fórmula

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-5x+6=0$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2.1}$$

o sea $\quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2}$

Con esto se tiene $x_1=3$ y $x_2=2$

En este caso las dos soluciones son números *reales distintos.*

b) $9x^2+6x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2.9}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{18}=-\frac{1}{3}$$

Es decir que: $x_1=x_2=-3$

Aquí se ve que algunas ecuaciones tienen como soluciones *números reales iguales*, se dice entonces que es una *raíz doble.*

c) $x^2-2x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2.1}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}$$

Obteniendo $x_1=1+2i$ y $x_2=1-2i$

En este caso vemos que las soluciones son números *complejos conjugados.*

> La ecuación del ejemplo c) NO TIENE SOLUCIÓN en el conjunto de los números reales.

Para determinar el tipo de solución, también llamado naturaleza de las raíces, basta con analizar el radicando de la fórmula de resolución. Éste recibe el nombre de *discriminante*, y se nombra con la letra griega delta Δ :

• Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces son reales distintas.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces son reales y coincidentes.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces son complejas conjugadas.

> Podemos inferir un concepto muy importante:
> *de acuerdo al signo del discriminante,*
> *es el tipo de soluciones que presenta una ecuación cuadrática.*

EJERCITACIÓN

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 9 = 0$

b) $8x^2 + 16x = 0$

c) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

d) $(x+1)^2 = 9$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones y clasifique sus raíces.

a) $2x^2 - 8x - 10 = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

3. Resuelve los siguientes problemas de aplicación:

• **a)** Calcule las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

• **b)** Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números pares consecutivos. Halle los valores de dichos lados.

• **c)** ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, cuya área es de 4.800 m^2 sabiendo que su largo es el triple de su ancho?

a) Realice un esquema interpretativo.

b) Determine el área del terreno en función del ancho a.

c) Calcule las dimensiones.

2.6. SÍNTESIS

Ecuaciones

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las *ecuaciones polinómicas de primer grado (o lineales)* con una incógnita tienen la forma:

a x + b = 0, siendo a y b números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a\,x + b}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax es el término lineal

b es el término independiente

$3x + 6 = 0 \rightarrow 3x = -6$

$x = -2$ solución de la ecuación

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como las operaciones con expresiones algebraicas.

$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$3\,(x+1) = 5\ (3x-9)$$
$$3x + 3 = 15x - 45$$
$$3 + 45 = 15x - 3x$$
$$48 = 12x$$
$$x = 4$$

Inecuaciones lineales

Una inecuación lineal es una desigualdad que se puede escribir:

$ax + b < c \qquad ax + b \leq c$

$ax + b > c \qquad ax + b \geq c$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$

Al igual que para una ecuación, *resolver* una inecuación también es hallar los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Este conjunto de valores que la verifican se llama **conjunto solución.**

$$\underbrace{\overbrace{ax + b}^{\text{Primer miembro}} < c}_{\text{Segundo miembro}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -2x + 5 \geq 6 \\ -2x \geq 6 - 5 \\ -2x \geq 1 \quad \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \end{array}}$$

Escribimos la solución como intervalo

S =]- ∞, -1/2]

En la recta

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las *ecuaciones polinómicas de segundo grado (o cuadráticas)* con una incógnita tienen la forma:

a x² + b + c = 0, siendo a, b y c números reales con a ≠ 0.

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ (o *raíces* de un polinomio de segundo grado) pueden obtenerse a partir de los coeficientes *a, b, c.*

Si uno de los términos no aparece en la ecuación es porque su coeficiente es nulo, en ese caso conviene completar la ecuación para aplicar la fórmula.

a x² + c = a x² + 0.x + c

Para determinar el tipo de solución, también llamado naturaleza de las raíces, basta con analizar el radicando de la fórmula de resolución. Éste recibe el nombre de *discriminante*, y se nombra con la letra griega delta Δ.

$$\overbrace{a x^2 + bx}^{\text{Primer miembro}} + c = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax² es el término cuadrático, y a su coeficiente

b x es el término lineal y b su coeficiente

c es el término independiente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2.1} \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Con esto se tiene $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 + 0\,x - 36$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4.(-36)}}{2.1} \qquad x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{144}}{2}$$

$$x_1 = -6 \text{ y } x_2 = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ $x_1 \neq x_2$ raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$ raíces reales coincidentes.
- Si $\Delta < 0$ no tiene raíces reales

2.7. EJERCITACIÓN PARA EL ESTUDIANTE

Contenidos conceptuales

Ecuaciones algebraicas de primer grado. Ecuaciones algebraicas de segundo grado. Fórmula resolvente. Inecuaciones de primer grado. Problemas de aplicación.

Objetivos

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

- Plantear las ecuaciones de primer y segundo grado en casos concretos
- Encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas
- Resolver problemas planteando la inecuación correspondiente
- Interpretar las soluciones encontradas
- Expresar por medio de intervalos las inecuaciones

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $3(x-1)+4x-3=4(x+2)+1$ Rta: $x = 5$

b) $\frac{2x-6}{5}+\frac{x}{3}=(x-1)$ Rta: $x = -3/4$

c) $\frac{5-x}{4}+\frac{x+2}{3}=8x$ Rta: $x = 23/95$

d) $\frac{6x+3\ (x-1)}{3}=4-2x$ Rta: $x = 1$

e) $\frac{1-x}{4}+\frac{5x+2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$ Rta: $x = -11/9$

f) $5\ (3x-4)+3\ (x+1)-x=\frac{3-x}{2}$ Rta: $x = 37/35$

g) $\frac{1}{4}(3x-5)+\frac{1}{2}(4-2x)=\frac{1}{2}(x+3)$ Rta: $x = -1$

Ejercicio 2

Resuelver las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2-4x-5=0$ Rta : $x1 = 5$; $x2 = -1$

b) $-x^2-3x+4=0$ Rta : $x1 = -4$; $x2 = 1$

c) $2x^2-2x-4=0$ Rta : $x1 = 2$; $x2 = -1$

d) $4x^2-16=0$ Rta : $x1 = 2$; $x2 = -2$

e) $2x^2+6x=0$ Rta : $x1 = 0$; $x2 = -3$

f) $x2-2x+1=0$ Rta : $x1 = x2 = -1$

Ejercicio 3

Resolver y expresar el conjunto solución como intervalo

a) $2\,(5 - x) < \dfrac{x+1}{3}$ Rta: $x > \dfrac{29}{7}$ $S = \left]\dfrac{29}{7}; \infty\right[$

b) $7 - (\ 2x - 5\ ) \geq 4 - x$ Rta: $x \leq 8$ $S =]-\infty; 8]$

c) $-6\,(3 - 2x) + 5\,(x + 4) \leq 3x$ Rta: $x \leq -\dfrac{1}{7}$ $S =]-\infty; -1/7]$

d) $x + 2\ (x + 1) \leq 5\,(x + 4)$ Rta: $x \geq -9$ $S = [-9; \infty[$

e) $x - 5 + 2\ (1-x) > 3 + x$ Rta: $x < -3$ $S =]-\infty, -3[$

f) $3x - 2\ (5x + 4) < 6x + 5$ Rta: $x > -1$ $S =]-1; \infty[$

MÓDULO 3

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

MÓDULO 3: ***FUNCIONES***

FUNCIONES

Interpretación de gráficos. Función afín. Definición y representación gráfica. Ecuación general de la recta. Función cuadrática. Definición. Representación gráfica. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

• Desarrollar habilidad para diferentes formas de expresión de función lineal y cuadrática
• Representar gráficamente funciones en ejes cartesianos
• Interpretar los contenidos en la resolución de problemas
• Desarrollar diversas estrategias para la resolución de situaciones problemáticas

3. FUNCIONES

Definición

Las *funciones* son un concepto importante de la matemática actual ya que es una herramienta necesaria para *describir, analizar, sacar conclusiones e interpretar diversas situaciones de otras ciencias o de la matemática misma a través de gráficos, tablas y fórmulas.*

Son ejemplos de ellas:

• La presión atmosférica depende de la altura a la que sea medida, dado que a cada altura le corresponde un valor de presión atmosférica.

• Se hace un descuento del 15% del valor de la compra, esto es a cada importe total le corresponde un importe de descuento.

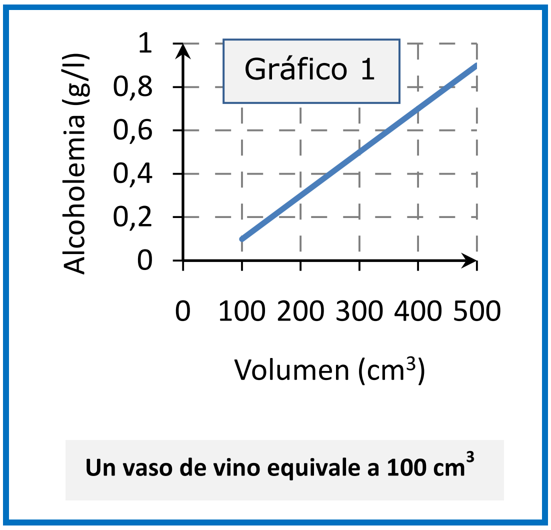
Daremos un ejemplo de función para poder interpretar, su definición formal.

POR EJEMPLO

Sabiendo que una de las principales causas de los accidentes de tránsito se debe al excesivo consumo de alcohol, ya que produce disminución de los reflejos, falsa apreciación de las distancias, subestimación de la velocidad y reducción de la percepción del riesgo; la función frepresentada en el gráfico 1, muestra la alcoholemia que alcanza un hombre de 60 kg, en función del volumen de vino ingerido. En el gráfico 2 la función f representa la alcoholemia que alcanza una persona en función del tiempo, a partir de la ingesta de ¾ litro de vino.

Teniendo en cuenta la ley que establece el límite de alcoholemia (cantidad de alcohol por litro de sangre) es de 0,5g por litro de sangre en conductores de autos, 0,2g/l para motociclistas y 0g/l para conductores de vehículos de pasajeros.

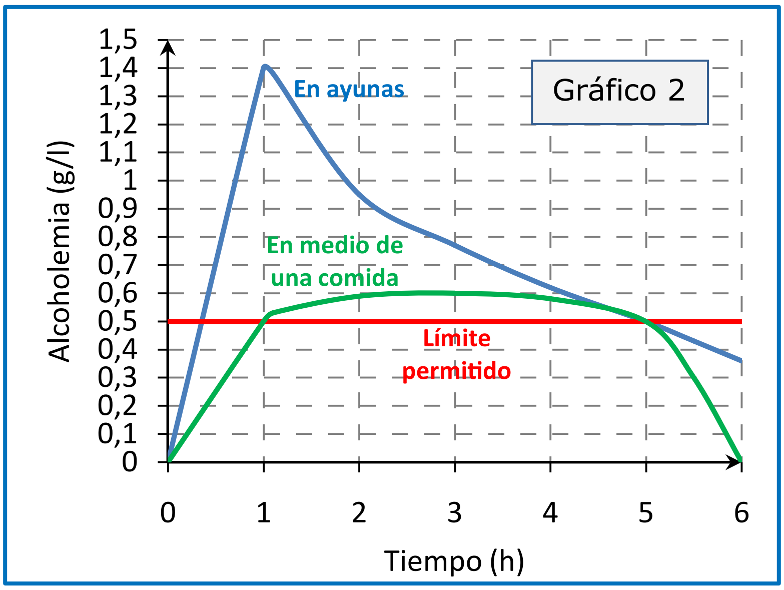
Observando cada gráfica, responder:



a) ¿Qué alcoholemia alcanza si bebe dos vasos de vino?

b) ¿Qué cantidad de vino ingirió si alcanza una alcoholemia de 0,7 g/l?

c) ¿Qué volumen como máximo puede beber un conductor de auto que pesa 60 kg?



a) ¿En qué momento se alcanza la mayor alcoholemia?

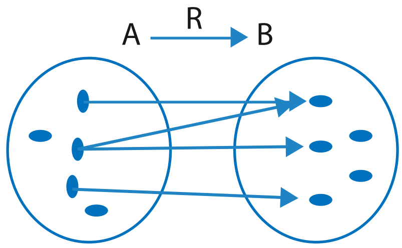
b) ¿Cuántas horas transcurren a partir de la ingesta de alcohol en medio de las comidas, hasta alcanzar el límite permitido para conducir?

RELACIÓN

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama relación binaria R de A en B, a una ley que hace corresponder a elementos de A, elementos de B.

Se muestra la relación en un diagrama de Venn y expresada por comprensión



$$R = \ (a, b) / (a, b) \in A \text{ x } B, \ a \, R \, b \}$$

Cuando se formula una expresión que liga dos o más objetos entre sí, postulamos una relación (no necesariamente matemática) Por ejemplo: **Juan es padre de Laura. (Juan, Laura)**

- **Dominio:** Es el conjunto formado por los primeros elementos del par ordenado o cupla.

- **Imagen:** Es el conjunto formado por los segundos elementos del par ordenado o cupla.

FUNCIÓN

Definición

Dado un conjunto A y un conjunto B, una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de **existencia** y **unicidad**.

La definición puede sintetizarse diciendo que **para todo elemento de A existe un único elemento de B** con el cual se relaciona.

EXISTENCIA → Todos los elementos de A tienen su correspondiente elemento en B

UNICIDAD → A cada elemento de A le corresponde un único elemento de B

Es importante cuando nombramos funciones decir en qué conjuntos está definida ya que por ejemplo una relación en la que para todo valor de "x", "y" se calcula según:

$$\mathbf{y = x : 3}$$

Definida de Z en Z, **no es función**, no cumple con la condición de existencia, por ejemplo para el entero 2 no existe ningún entero con el cual se relacione a través de la fórmula dada.

En cambio si está definida de IR en IR **sí es función**, ya que para todo real existe otro único real que se obtiene dividiendo por 3.

En general el esquema que se utiliza para funciones numéricas es el siguiente:

Esquema funcional

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

El conjunto de partida A es el dominio de la función, lo representamos con la letra D, el conjunto de llegada lo tomaremos como el conjunto de los números reales IR. En base a esto, el esquema funcional lo escribimos como:

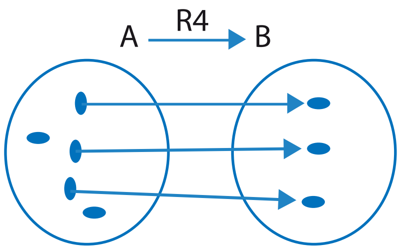
Esquema funcional

$$\boxed{\begin{aligned} f : D &\to IR \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}}$$

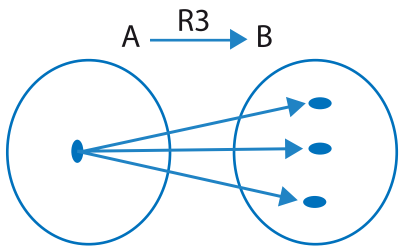
Llamamos **x (variable independiente)** a los elementos del conjunto A, e **y (variable dependiente)** a los elementos del conjunto B.

En el ejemplo "Juan es padre de Laura" tenemos una relación que no es función, porque Juan puede tener otros hijos, con lo que le corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada y no cumple la condición de unicidad. Si la relación la plantemos "Su padre es" sería función, porque a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un y solo un elemento en el conjunto de llegada.

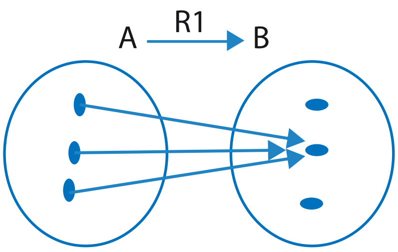
Consideremos las 4 relaciones dadas en las figuras, veremos cuáles de ellas corresponden a funciones



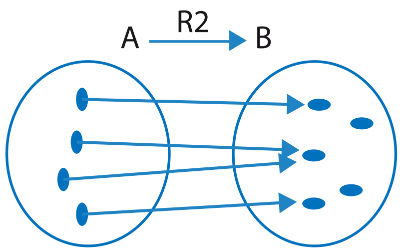
Relación: no es función porque no cumple con la condición de existencia



Relación: no es función porque no cumple con la condición de unicidad



La relación es FUNCIÓN

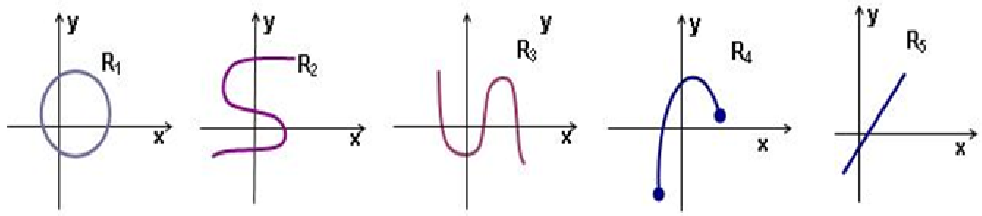


La relación es FUNCIÓN

EJERCITACIÓN

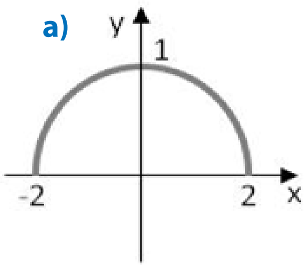
1) Indique, justificando, cuál de las siguientes relaciones son funciones.

Ayuda: trace rectas verticales y observe cuántos puntos de corte tiene cada recta con la gráfica; si es más de uno no es una función.



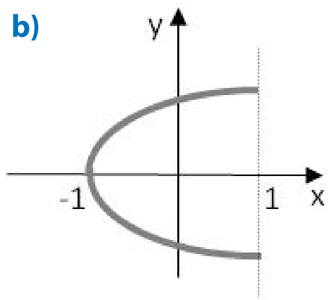
2) Indique cuáles de los gráficos corresponden a funciones de A en B:

a)



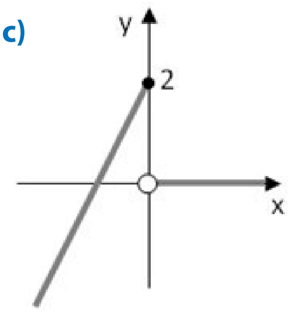
$A = [-2,2]$ $B = \mathrm{IR}$

b)



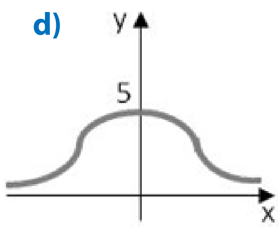
$A = [-1,1]$ $B = [-1,1]$

c)



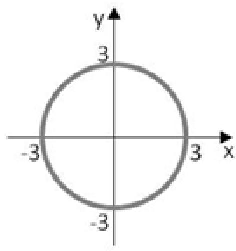
$A = \mathrm{IR}$ $B = \mathrm{IR}$

d)



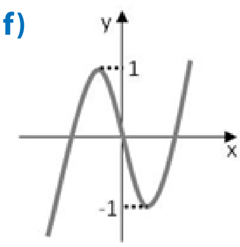
$A = \mathrm{IR}$ $B = \mathrm{IR}$

e)



$A = [-3,3]$ $B = [-3,3]$

f)

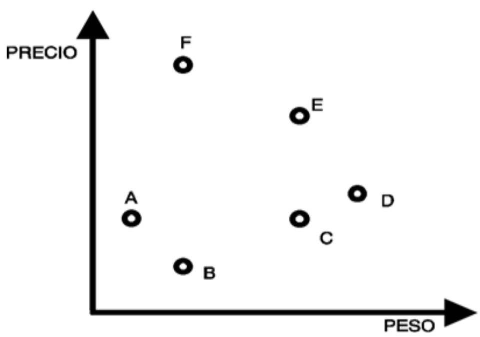


$A = \mathrm{IR}$ $B = \mathrm{IR}$

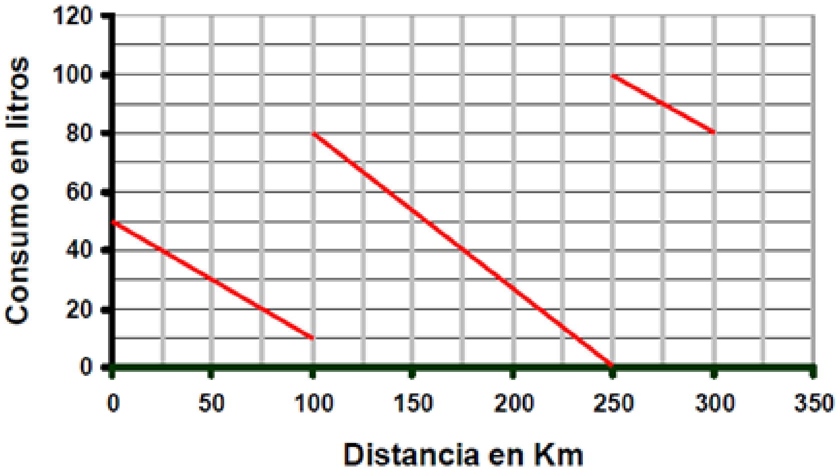
3) Indique cuáles de los gráficos corresponden a funciones de A en B:

3.1. Cada punto de este gráfico representa una bolsa de azúcar. Observando el gráfico responder:

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?
b) ¿Qué bolsa es la más pesada?
c) ¿Qué bolsa es la más barata?
d) ¿Qué bolsas tienen el mismo peso?
e) ¿Qué bolsas tienen el mismo precio?
f) ¿Qué bolsa conviene más E ó C? ¿Por qué?
g) ¿La gráfica corresponde a una función?

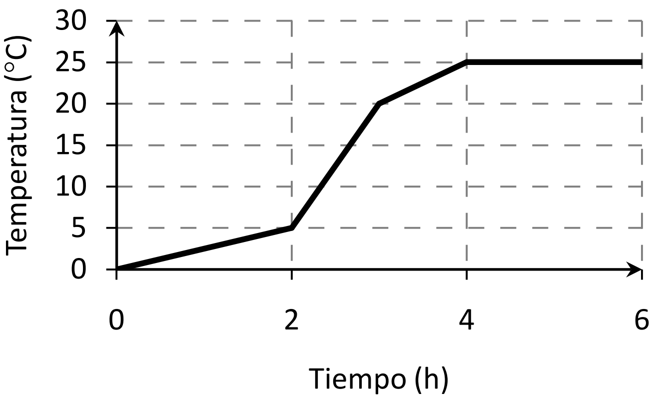


3.2. El gasoil que hay en un depósito de un autobús viene representado por la siguiente gráfica:



a) Cuántos litros tenía el depósito al salir
b) Cuántos litros tenía a su llegada
c) Cuántos litros consumió durante el viaje
d) Qué ocurrió en el km. 250
e) Cuándo puso el conductor por primera vez gasoil
f) Corresponde el gráfico a una función

3.3. El siguiente gráfico muestra la variación de temperatura de un alimento en función del tiempo transcurrido desde que fue sacado de la heladera.

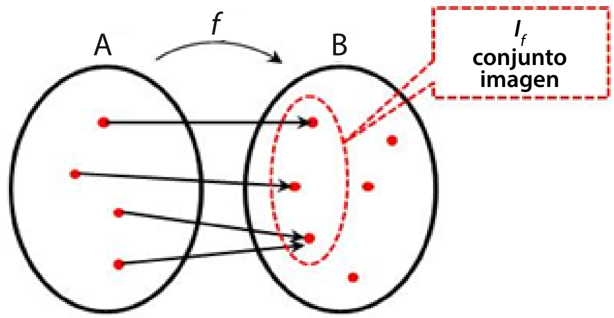


Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿A qué temperatura fue retirado de la heladera?
b) ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó 20ºC?
c) ¿Durante qué hora aumentó más rápidamente la temperatura?
d) ¿A qué hora disminuyó la temperatura?
e) ¿A partir de qué hora mantuvo la temperatura constante?
f) ¿Qué temperatura alcanzó al finalizar la segunda hora?
g) ¿Corresponde el gráfico a una función?

3.1. DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

El dominio de la función es el conjunto al que pertenecen los elementos para los cuales la función está definida, es decir, es el conjunto de elementos que tienen imagen.
El conjunto imagen es el conjunto al que pertenecen todas las imágenes de los elementos del dominio.



Conjunto de partida **Conjunto de llegada**

El conjunto de partida A, lo llamamos **dominio de la función**, y al conjunto de elementos al que llegan las flechas, que está incluido en el conjunto de llegada B, señalado con I_f, lo llamamos **conjunto imagen**.

Definición

Se llama **dominio (Dom (f))** al conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.

El dominio coincide con el conjunto de partida $D \equiv A$

Definición

Se llama **imagen (Im(f))** al conjunto de valores de y que están asociados a cada elemento x.

El conjunto imagen está *incluido* en el *conjunto de llegada* $I \subset B$

POR EJEMPLO

a) $f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$ dada por $f(x) = x^2$,el conjunto dominio es Dom (f) = IR y el conjunto imagen es Im (f) = IR_0^+

b) $f: \mathrm{ID} \rightarrow \mathrm{IR}$ dada por $f(x) = \sqrt{x - 1}$, para determinar el dominio, tenemos en cuenta que el radicando debe ser positivo, de lo contrario el resultado no es un número real, por lo tanto el conjunto dominio está formado por todos los valores x que cumplen la condición $x > 1$ Dom (f) = $[1,\infty[$. Si consideramos x =1 vemos que el valor más chico que toma la función es cero.

El conjunto imagen es: Im (f) = $[0, \infty[$. El dominio es un subconjunto de IR

3.2. RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Definición

Se llaman raíces de una función a los valores de la variable independiente que pertenecen al dominio y su imagen es cero, es decir los valores de x que hacen $f(x) = 0$.

Gráficamente las raíces son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje de abscisas o eje x.

Para determinar las raíces de f planteamos la ecuación correspondiente: f (x) = 0

$x^2 - 1 = 0$ si despejamos $|x| = 1$ siendo $x = \pm 1$

Las soluciones de dicha ecuación son + 1 y -1. Entonces *"esos dos valores son las raíces de la función dada"*

3.3. ORDENADA AL ORIGEN DE UNA FUNCIÓN

Definición

Se llama Ordenada al Origen de una función, a la imagen de "cero" por la función.

El cero debe pertenecer al dominio f (0) = Ordenada al Origen. Gráficamente es el punto donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas o eje y.

POR EJEMPLO

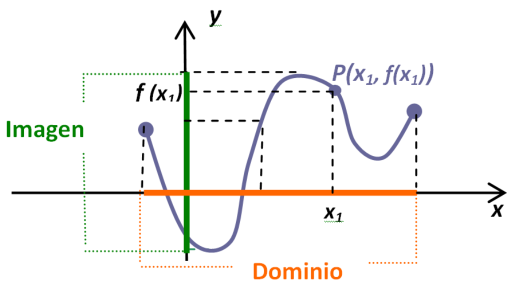
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f (x) = x2 - 1

Para determinar la ordenada al origen de f calculamos:

$f(0) = 0^2 - 1 =$ **-1 → Ordenada al origen**

3.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La representación gráfica de una función se hace sobre un plano cartesiano. El gráfico de una función $f: D \rightarrow \mathbb{R} \;/\; y = f(x)$, es el conjunto de todos los puntos del plano cartesiano de la forma $P(x, f(x))$ o $P(x, y)$, en los que la primera componente pertenece al dominio de la función, y la segunda componente es la respectiva imagen.



3.5. FUNCIONES POLINÓMICAS

Definición

Se llama función polinómica de grado n a la función definida de la forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ siendo n= natural

Donde
- **n es un número natural**
- **a_0, a_1, a_2 ... a_n** son números reales, llamados coeficientes:
- **a_n** recibe el nombre de **coeficiente principal**
- **a_0** es el **término independiente**

En este curso veremos solo la función polinómica de grado uno y grado dos.

3.6. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 1 (Función afín)

Definición

Se llama **función afín** a toda función definida como:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = ax + b$$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$

La función afín es una ***función polinómica de grado 1***. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

La gráfica de una función afín es una ***RECTA***, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$f(x) = a x + b$$

a es el ***coeficiente del término lineal***,
gráficamente representa la ***"pendiente"*** de la recta

b es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen
y señala la ordenada del punto donde *f* corta al eje de las ordenadas *y*.

- **Cuando b = 0 la función recibe el nombre de "FUNCIÓN LINEAL"**

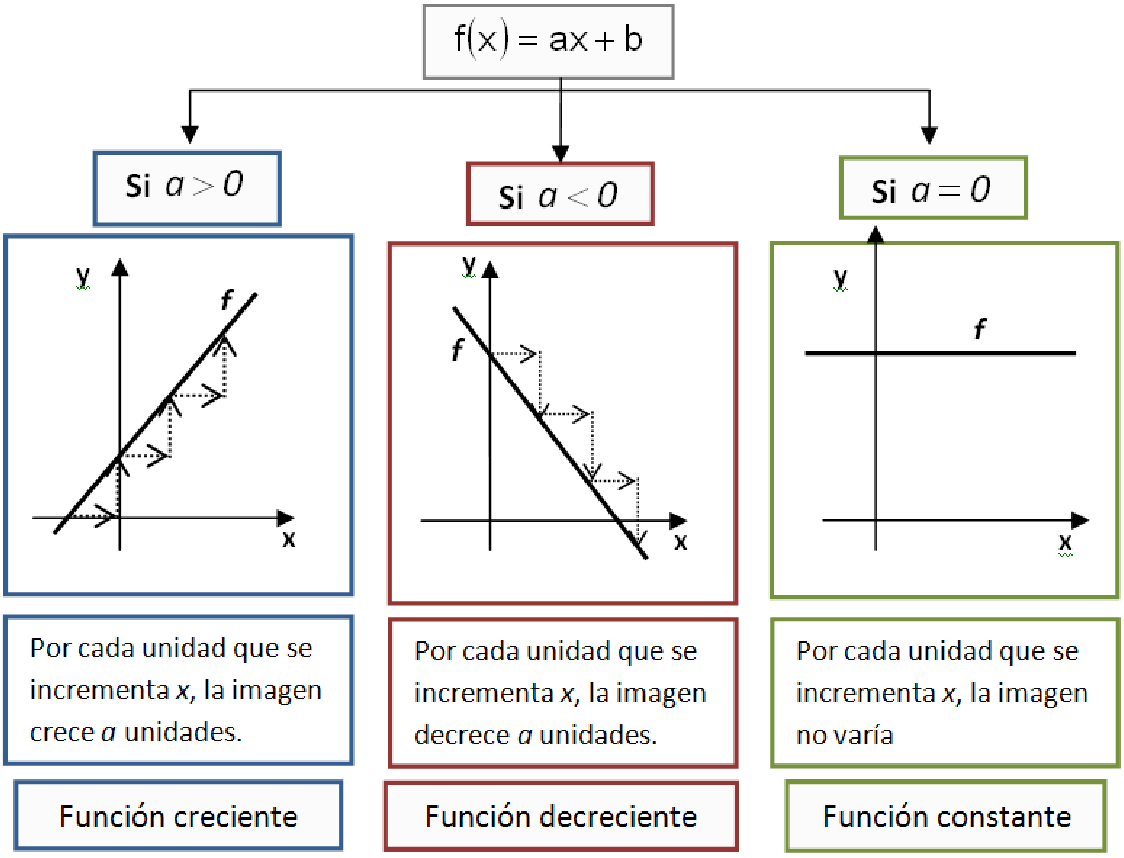
Expresión → ***Gráfica***
f (x) = a x — La recta pasa por el origen de coordenadas

- **Cuando a = 0 es una función polinómica de grado cero llamada "FUNCIÓN CONSTANTE"**

Expresión → ***Gráfica***
f (x) = b — La recta es paralela al eje de abscisas

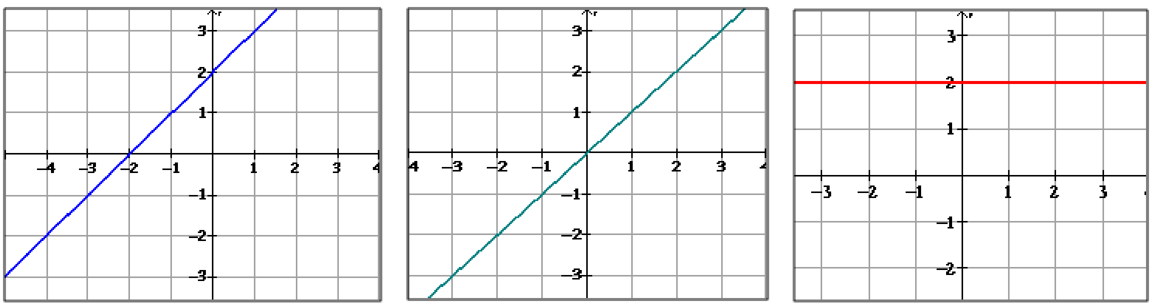
Importante: La función constante **no es una función** afín porque **a = 0**. La incluimos en este análisis porque su gráfica es una recta.

3.6.1. Análisis del coeficiente principal



La pendiente nos indica cuantas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, por cada unidad que aumenta la variable independiente.

POR EJEMPLO



Función afín **Función lineal** **Función constante**

3.6.2. Raíz de la función afín

Por ser una función polinómica de grado uno, tiene una raíz real y es por definición el valor de la variable independiente que anula la función.

$$f(x) = ax + b$$
$$0 = ax + b \rightarrow -b = ax$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

3.6.3. Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$$

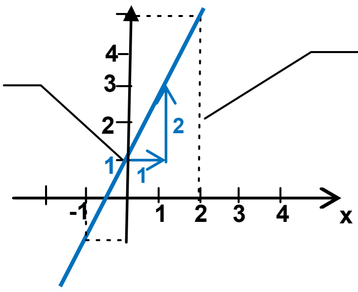
Definición	*Gráficamente*
Raíz $f(x) = 0$	la recta corta al eje de abscisas
Ordenada al origen $f(0)$	la recta corta al eje de ordenadas

3.6.4. Representación gráfica de la función afín

Ejemplo 1:

Consideremos la función $f : IR \rightarrow IR \ / \ y = 2x + 1$.
La representamos a partir de su pendiente y ordenada al origen.

Ordenada al origen

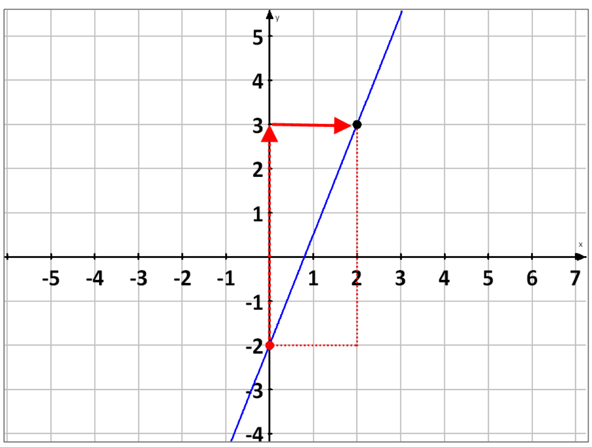


Pendiente $a = 2$, por cada unidad que se incrementa x, la función se incrementa en 2 unidades.

Obtención de la expresión de la función a partir de la gráfica

Consideremos las siguientes gráficas:

a)



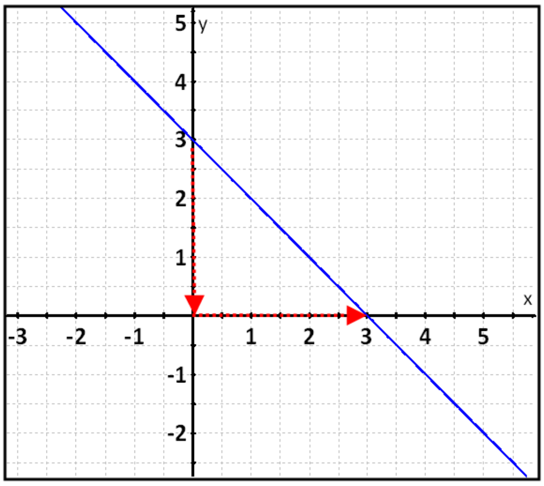
Ordenada al origen $b = -2$

Subo 5 unidades en y
Corro dos unidades a la derecha en x

Pendiente: $a = \frac{5}{2}$

La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = \frac{5}{2}x - 2$

b)



Ordenada al origen b = 3

Bajo 3 unidades en y
Corro 3 unidades a la derecha en x

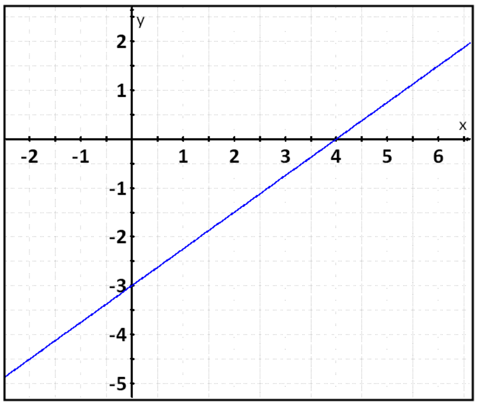
Pendiente: $a = \frac{-3}{3} = -1$

La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = -x + 3$

EJERCITACIÓN

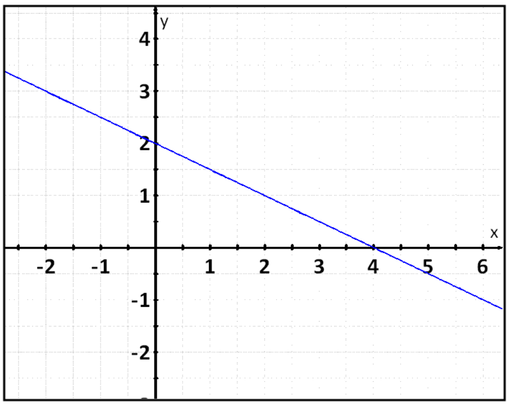
Encuentre la fórmula de las siguientes funciones afines dadas por sus gráficos:

a)



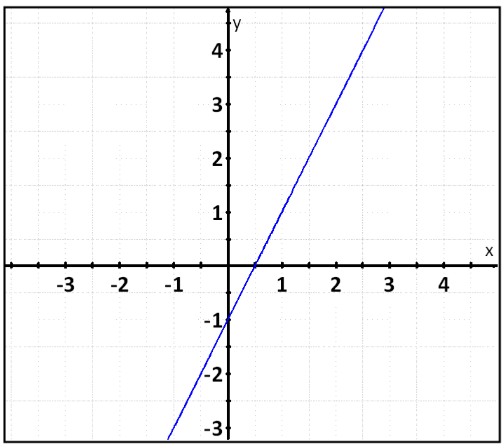
f(x) =

b)



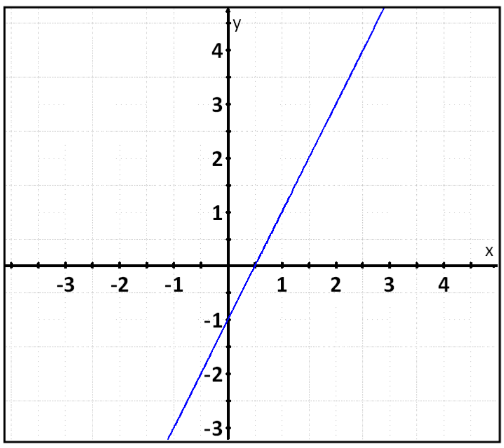
f(x) =

c)



f(x) =

d)



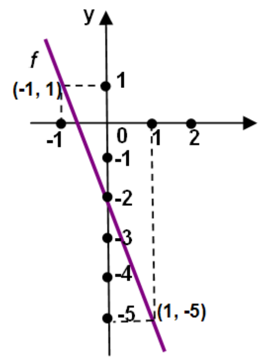
f(x) =

Ejemplo 2:

También es posible representarla mediante una tabla de valores. Es importante recordar desde la axiomática, que por dos puntos distintos pasa una y solo una recta a la que pertenecen, por lo que es suficiente calcular dos puntos de la misma.

Sea $f: IR \rightarrow IR \ / \ y = -3x - 2$

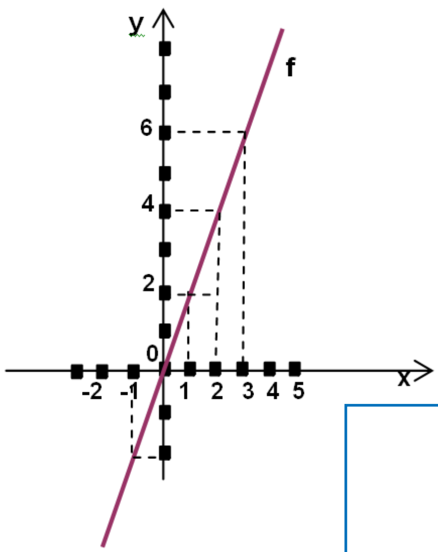
x	y	P(x,y)
-1	f(-1)= 1	(-1,1)
1	f(1) = -5	(1, -5)



Si la función es lineal b = 0. Su gráfica pasa por el origen de coordenadas

Analicemos la función $f(x) = 2x$

Utilizando una tabla de valores para su representación



x	y
1	2
2	4
3	6

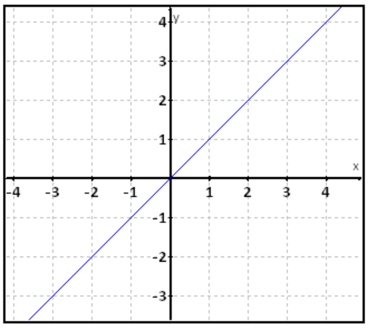
Al calcular la razón entre la ordenada y la abscisa de cada punto obtenemos:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 = a$$

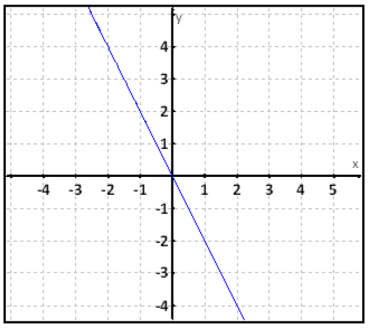
En el caso de una función lineal, la razón entre la ordenada y la abscisa de un punto perteneciente a la recta es igual a la pendiente de la misma.
No tenemos en cuenta el origen de coordenadas

Si $a = 1 \rightarrow f(x) = x$ recibe el nombre de ***función identidad.***

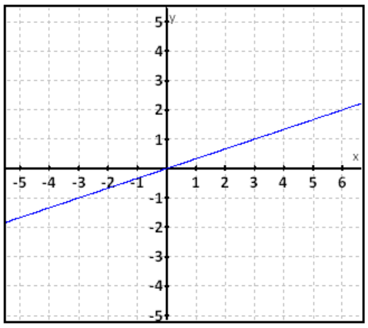
Ejemplo 3:



$y = x$
(función identidad)



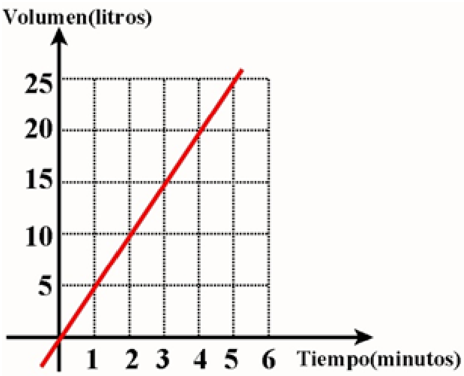
$y = -2x$



$y = \dfrac{1}{3}x$

Ejemplo 4:

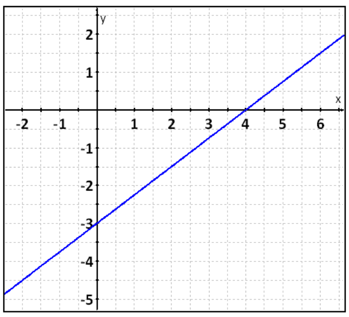
Supongamos un estanque que está vacío. Se abre un grifo y se comienza a llenar a razón de 5 litros por minuto. La variable independiente es el tiempo, medido en minutos, la dependiente es la cantidad de litros que ingresan al estanque. Hallar una función que represente la situación dada.



Ordenada al origen b= 0   Pendiente a = 5   La función representada es f(x) = 5x

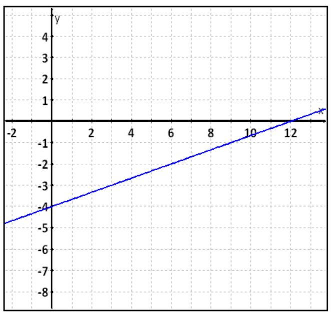
Ejemplo 5:

Vimos representación utilizando tabla de valores, dos puntos que podemos utilizar para su representación, son la intersección con los ejes.



$f : IR \to IR \;/\; y = \dfrac{3}{4}x - 3$

ordenada $f(0) = -3$
raíz $x = 4$



$f : IR \to IR \;/\; y = \dfrac{1}{3}x - 4$

ordenada $f(0) = -4$
raíz $x = 12$

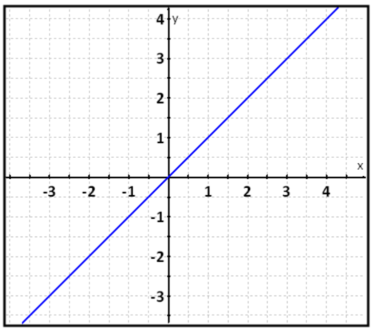
EJERCITACIÓN

1) Dadas las siguientes funciones afines:

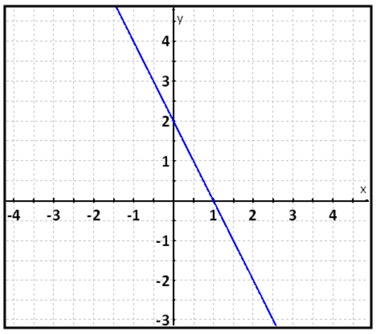
$f(x) = -2x + 4$ $\qquad$ $f\ (x) = 5x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $f\ (x) = \frac{1}{3}x - 4$

a) Indique la pendiente y la ordenada en el origen
b) El valor de la raíz
c) Represente gráficamente cada función

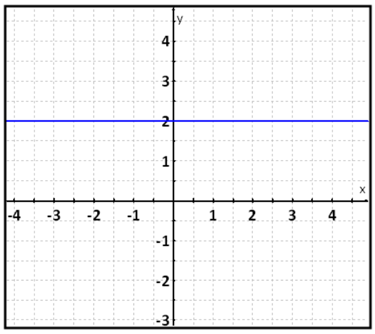
2) Observe las siguientes gráficas para contestar los ítems que siguen:



f(x)



g(x)



h(x)

a) Una con flechas, según corresponda:

La función f(x) tiene pendiente	nula
La función g(x) tiene pendiente	positiva
La función h(x) tiene pendiente	negativa

b) Encierre la fórmula correspondiente en cada caso:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \\ -x \\ \frac{1}{2}x \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+2 \\ -2x+2 \\ 2x+2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x \\ 2x \\ 2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases}$$

3) Un plomero cobra \$15 por la visita a domicilio y \$25 por cada hora de trabajo

Horas de trabajo	0	1	2	3	4	5
\$						

a) Complete la tabla de valores

b) Represéntela gráficamente, escriba las magnitudes en los ejes.

c) Halle la pendiente

d) Halle la ordenada al origen

e) Escriba la fórmula

Nota: $x = 0$ hace referencia a la visita a domicilio

3.6.5. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN

Para obtener f(x) a partir de datos de la función o de su gráfica, consideraremos tres casos:

a) *Datos*: pendiente y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función

Ejemplo: $a = 4$ y la recta pasa por el punto (1, 3) esto equivale a decir que $f(1) = 3$ (la imagen del 1 es 3)

Partimos de la función $f(x) = a\,x + b$, podemos utilizar la notación $y = a\,x + b$

Conocemos $a = 4$, reemplazamos $y = 4x + b$, para determinar b, tenemos en cuenta:

- Para $x= 1$ $y = 3$ en la ecuación nos queda: $3 = 4\,.(1) + b \Rightarrow b = -1$
- La función que cumple con las condiciones es: $y = f(x) = 4x - 1$

b) *Datos*: ordenada al origen y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función

Ejemplo: $b = 3$ y la recta pasa por el punto (5,2)

- Reemplazamos b en la expresión $y = a\,x + 3$, sabemos que para $x= 5$, $y = 2$

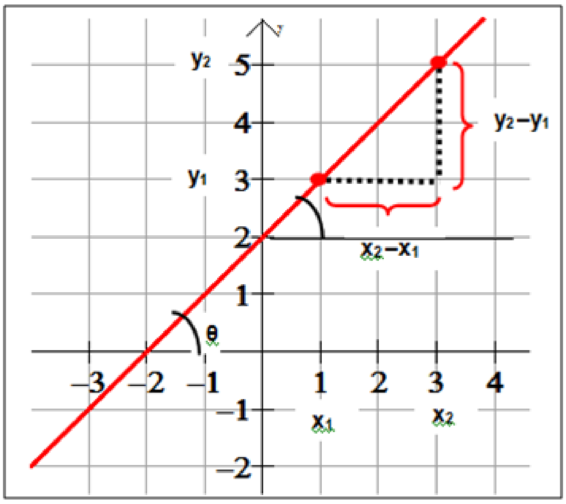
  $2 = a.\,5 + 3$ despejamos $a = (2 - 3)/5 = -1/5$

- La función que cumple con las condiciones es : $y = f(x) = -1/5\ x + 3$

c) *Datos*: Se conocen dos puntos por donde pasa la recta, o lo que es lo mismo dos valores de la función.

En este caso, tenemos dos incógnitas: la pendiente y la ordenada al origen.

Cálculo de la pendiente



La pendiente de la recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x. Su fórmula de cálculo es:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyascente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el gráfico el punto (x_1, y_1)= (1,3)
El punto (x_2, y_2)= (3,5)

$$\operatorname{tg}\theta = a = \frac{5-3}{3-1} = 1$$

Conocido la pendiente, despejamos b como en el punto anterior, ya que conocemos dos puntos que pertenecen a la recta, podemos reemplazar cualquiera de los dos $y = a\,x + b$ reemplazamos: $y = x + b$ teniendo en cuenta que para $x = 1$ $y = 3$

$$3 = 1 + b \Rightarrow b = 2 \text{ valor que vemos en el gráfico } \quad f(x) = x + 2$$

Otra forma de obtener a partir de dos puntos la expresión de f(x), es utilizando la

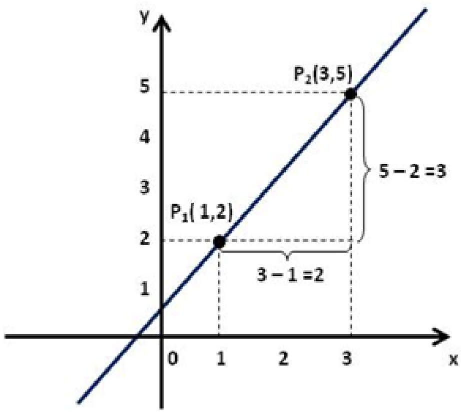
ecuación de la recta que pasa por dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ y reemplazamos los puntos.

Si observamos la ecuación el término $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta.

Para el ejemplo: $y - 3 = \frac{5-3}{3-1}(x - 1)$ $\quad y - 3 = \frac{2}{2}(x - 1)$; $\quad y - 3 = x - 1 \Rightarrow y = x + 2$

POR EJEMPLO

Construir la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1(1;2) y P_2(3;5)



Utilizamos la expresión de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$$

Reemplazando por las coordenadas de los puntos y la pendiente calculada resulta:

$$y - 2 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1)$$

despejamos

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

EJERCITACIÓN

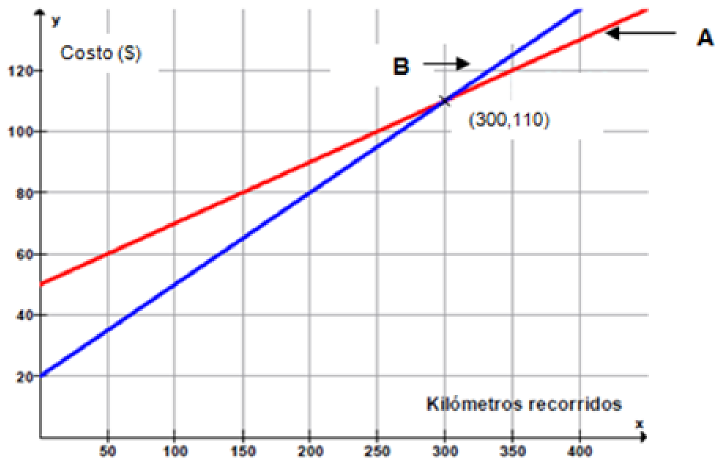
1. Hallar la ecuación de una recta que cumpla las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos (-2,3) y (4 ,2)

b) f(0) = 2 y f(-1) = 0

c) f(4) = - 5 y f(6) = 7

2. En el siguiente gráfico, se ha representado el costo de alquiler de un vehículo, en función de los km. recorridos.



Obtener para cada agencia, la expresión analítica de la función que nos da el costo total según los km. recorridos.

a) Determinar en cada caso, cuál es el costo por km. recorrido.

b) Explicar el significado de la ordenada al origen, para cada una de las agencias.

c) Analizar cuál de las dos opciones es más conveniente en función de los km. que se deseen recorrer.

3. Encontrar la fórmula para calcular la cantidad de agua que queda cada día, en una represa que pierde agua de manera uniforme, si la cantidad inicial es de 1150 millones de litros y los datos diarios son:

Día	1	2	3
Volumen (millones de litros)	1130	1110	1090

a) ¿Si continúa la pérdida de 20 millones de litros por día, en cuánto tiempo se quedará vacía la represa?

b) ¿Cuándo tendrá 150 millones de litros?

4. Una población que tenía 20.000 personas en 1995, va aumentando siempre de la misma manera como se muestra en la tabla. Construye una gráfica y estima la cantidad de personas que habrá este año (suponiendo que se mantiene la tendencia). Encuentra una fórmula general para calcular la cantidad de personas en función del tiempo. ¿Cuándo se superarán las 100.000 personas?

t (años)	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	....
P (miles de personas)	20	24	28	32							

Nota: Cuando se trabaja con el tiempo, para obtener la expresión de la función que representa la situación planteada, tenemos en cuenta que al año de inicio de la medición le asignamos el valor $x = 0$ (1995), de esta manera al año 2015 le corresponde $x = 20$.

5. Para invitar a un concierto a sus amigos, Juan tiene dos posibilidades:

- A: Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de \$100 y pagar las entradas a \$70 cada una.
- B: Pagar cada entrada a \$ 95.

Sea x el número de invitados de Juan: Obtener en función de x el precio a pagar en los dos casos. Finalmente, Juan se presenta al concierto con 7 amigos.

¿Qué solución habría debido adoptar?

3.7. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 2 (Función cuadrática)

Las funciones cuadráticas modelan gran parte de situaciones del mundo físico. El estudio de éstas, resulta de interés no sólo en matemática sino también en algunas disciplinas como por ejemplo: Física, Economía, Biología, Ingeniería, Arquitectura.

Son útiles para describir:

- trayectoria de proyectiles
- ganancias y costos de empresas
- variación de la población de determinadas especies
- efectos nutricionales de los organismos
- óptica, etc.

Definición

Se llama **función cuadrática** a toda función f: IR $\rightarrow$ IR
Tal que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ en la que a, b y c son números reales, con $a \neq 0$

La función cuadrática es una función polinómica de grado 2. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios:

$$\mathbf{f\,(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0}$$

La gráfica de una función cuadrática es una **PARÁBOLA**, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$\mathbf{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

a es el ***coeficiente del término cuadrático*** dependiendo de su signo las ramas de la parábola se abren hacia arriba o abajo.

b es el ***coeficiente del término lineal*** dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.

c es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas y.

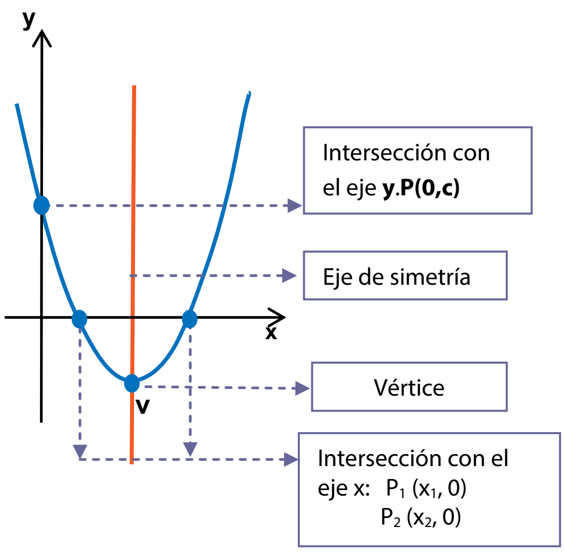
3.7.1. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En la gráfica es importante reconocer elementos, que son de gran utilidad para la representación de la función, como los puntos de intersección con los ejes coordenados, el vértice y el eje de simetría.

a. *Eje de simetría*
Toda función cuadrática tiene un eje de simetría. Este eje es paralelo al eje **y** o coincidente con el mismo. La ecuación de la recta que incluye al eje de simetría es:

b. *Vértice*
Es el único punto de la función que es simétrico consigo mismo con respecto al eje de simetría.
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(\frac{-b}{2.a},\ f\left(\frac{-b}{2.a}\right)\right)$$



c) Puntos de intersección con los ejes

Eje de las ordenadas (Ordenada al origen c)

Este punto tiene por ordenada al término independiente **c** y abscisa nula.
Las coordenadas del punto son: P(0,c).

Eje de las abscisas (raíces reales x_1 y x_2)

Para calcular las coordenadas del o los puntos de intersección de la curva con el eje **x**, se anula la expresión de la función obteniéndose una ecuación cuadrática:
$a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se pueden obtener reemplazando los coeficientes *a, b, c* en la siguiente expresión denominada **"resolvente".**

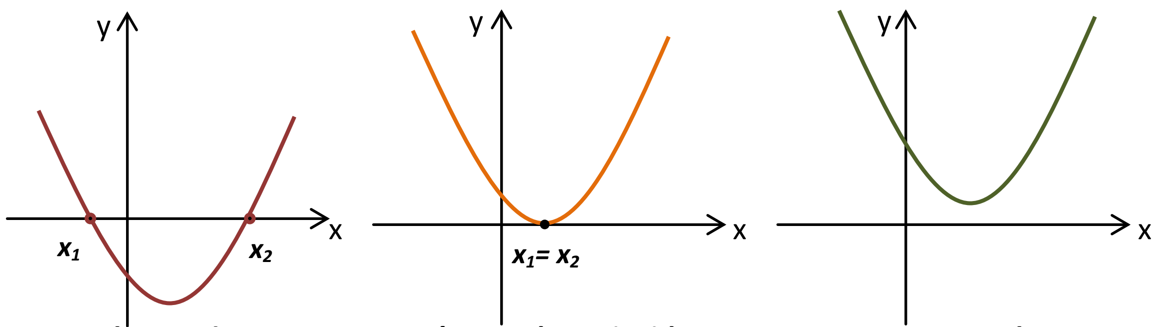
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\longrightarrow \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hemos visto que el radicando recibe el nombre de discriminante, y se simboliza con la letra Δ (delta), de su valor depende el tipo de raíces.

$\Delta = b^2 - 4ac$
Si $\Delta > 0$ $\quad x_1 \neq x_2$ raíces reales distintas
Si $\Delta = 0$ $\quad x_1 = x_2$ raíces reales coincidentes
Si $\Delta < 0$ $\quad$ no tiene raíces reales

Gráficamente



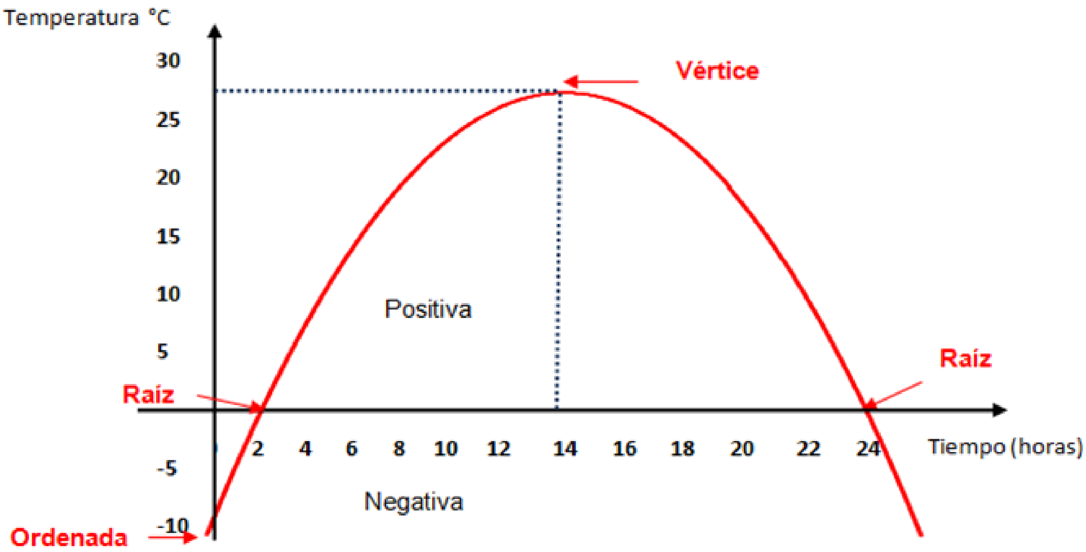
Raíces reales distintas — **Raíces reales coincidentes** — **No tiene raíces reales**

Importante: Una función polinómica de grado 2 tiene dos raíces reales o ninguna.

EJERCITACIÓN

1. Veremos un problema, para relacionar: vértice, ordenada al origen y raíces con una aplicación de función cuadrática.

En un laboratorio comenzaron a las 0 horas a medir la temperatura de una sustancia. La medición se hizo durante el resto del día y se obtuvo un gráfico que relaciona la temperatura con el tiempo.

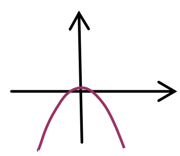
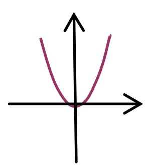


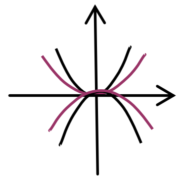
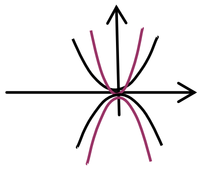
Análisis de la gráfica que representa la situación planteada

a) ¿En qué horario se registraron temperaturas sobre cero?
b) ¿En qué horario se registraron temperaturas bajo cero?
c) ¿Cuál fue la temperatura al inicio de la medición?
d) ¿Durante qué horas se midió un descenso de temperatura?
e) ¿Cuál es la máxima temperatura registrada? ¿A qué hora se hizo la medición?

3.7.2. CARACTERÍSTICAS DE LA REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las características de la función cuadrática, están relacionadas con los coeficientes a, b y c. Comencemos estudiando al coeficiente principal:

Si a<*0*, las ramas de la parábola abren hacia abajo.	
Si a>*0*, las ramas de la parábola abren hacia arriba.	

Si $0 < \|a\| < 1$, la parábola se ensancha con respecto a la parábola en la que $\|a\| = 1$	
Si $\|a\| > 1$, la parábola se angosta con respecto a la parábola a la parábola en la que $\|a\| = 1$	

Observamos entonces que de acuerdo al signo del coeficiente del término cuadrático, y conociendo las coordenadas del vértice es posible definir el conjunto imagen de la función.

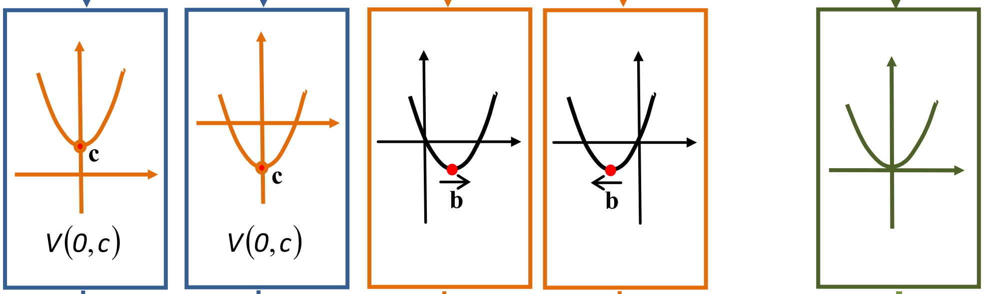
¿Qué pasa con b y c?

$$y = ax^2 + bx + c$$

Si $a = 1,\ b = 0,\ c \neq 0$ → $y = x^2 + c$

Si $a = 1,\ b \neq 0,\ c = 0$ → $y = x^2 + bx$

Si $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ → $y = x^2$



La gráfica se desplaza verticalmente:
- hacia arriba, si $c>0$
- hacia abajo si $c<0$

El eje de simetría coincide con el eje ***y***

La gráfica se desplaza horizontalmente:
-hacia la derecha si $b<0$
-hacia la izquierda si $b>0$

El eje de simetría es paralelo al eje ***y***

El vértice coincide con el origen de coordenadas.

El eje de simetría coincide con el eje ***y***

Si $c > 0$

$I_f = [c;\ \infty)$

No tiene raíces reales

Si $c < 0$

$I_f = [c;\ \infty)$

Presenta raíces reales distintas.

$I_f = [\ y_v,\ \infty\ )$

Presenta raíces reales distintas de las cuales una es

$x = 0$

$I_f = [\ 0,\ \infty\ )$

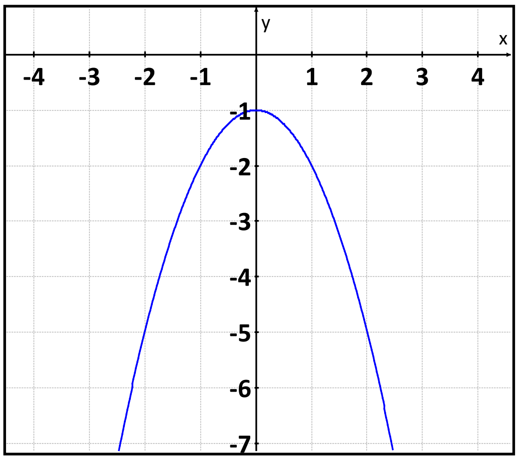
Presenta raíces reales coincidentes

$x_1 = x_2 = 0$

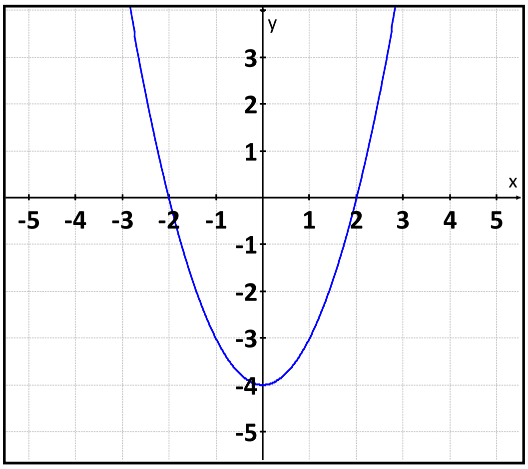
Teniendo presente las características mencionadas es posible dibujar la parábola, conocido el vértice, la ecuación del eje de simetría y las raíces si existen y son reales distintas. En caso contrario, conocido un punto que no sea el vértice, por simetría con respecto al eje, se puede calcular o dibujar su simétrico.

EJERCITACIÓN

1. Dadas las siguientes graficas:



$y = -x^2 - 1$



$y = x^2 - 4$

a) Escriba las coordenadas de los vértices de cada una de ellas.

b) Para cada función, escriba la ecuación del eje de simetría.

c) Identifique y señale las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes para cada gráfica, si existen.

d) Defina el conjunto imagen para cada una de las funciones dadas.

3.7.3. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Hasta ahora sólo hemos trabajado con la expresión general o polinómica de la función cuadrática, a continuación te presentamos un cuadro con todas las formas de expresar la función cuadrática.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v, \quad a \neq 0$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \; a \neq 0$	a, x_1, x_2

EXPRESIÓN CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La expresión canónica, nos permite visualizar directamente las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

Su expresión es: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

Siendo el vértice: $V(x_v, y_v)$ y la ecuación del eje de simetría $x = x_v$

Si a =1, la expresión es: $f(x) = (x - x_v)^2 + y_v$

Mediante un ejemplo analizamos la construcción de la expresión canónica a partir de la expresión polinómica de la función cuadrática.

POR EJEMPLO

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$

Si analizamos la expresión canónica, observamos que consta de dos términos:

• el primero, es un producto cuyo primer factor es el coeficiente del término cuadrático y el segundo el cuadrados de un binomio.

• el segundo, es un número real

1º Sacamos factor común 3 (el coeficiente del término cuadrático).	$f(x)=3\cdot\left(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}\right)$
2º Multiplicamos y dividimos por 2 el término lineal.	$f(x)=3\cdot\left(x^2-\frac{2}{2}\cdot\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}\right)$
3º Aplicamos la propiedad asociativa del producto.	$f(x)=3\cdot\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}\right)$
4º Sumamos y restamos $\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$f(x)=3\cdot\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{3}\right)$
5º Utilizamos la igualdad $(x-a)^2 = x^2 - 2a + a^2$	$f(x)=3\cdot\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{36}\right]$
6º Distribuimos el producto con respecto a la suma.	$f(x)=3\cdot\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-3\cdot\frac{37}{36}$
7º Obtenemos así la forma canónica.	$f(x)=3\cdot\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{12}$

Siendo las coordenadas del vértice: $V\left(\frac{5}{6},-\frac{37}{12}\right)$

y la ecuación del eje de simetría: $x=\frac{5}{6}$

EXPRESIÓN FACTORIZADA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sean x_1 y x_2 las raíces reales de una función cuadrática, y *a* el coeficiente del término cuadrático, la expresión factorizada de la función cuadrática tiene por expresión:

$$\boxed{f\ (x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$$

POR EJEMPLO

Si $f(x)=2x^2-4x-6$, el coeficiente principal es a = 2, y sus raíces reales son $x_1=3$ y $x_2=-1$, entonces la expresión factorizada es:

$$f\ (x)=2\cdot(x-3)\cdot(x+1)$$

EJERCITACIÓN

1. Encuentre una función cuadrática que tenga como ceros $x_1=3$ y $x_2=2$ y cuya gráfica pase por el punto (0,10).

2. Dadas las funciones cuadráticas:

$f(x)=x^2+4x$ $\qquad f(x)=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+2$ $\qquad f(x)=x^2-9x+9$

a) Escriba la función en la expresión canónica.

b) Halle la intersección con los ejes coordenados.

c) Grafique la parábola.

3. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas definidas de IR $\to$ IR:

I. $f(x)=x^2+2$

II. $f(x)=x^2+6x+9$

III. $f(x)=4-x^2$

IV. $f(x)=-x^2+2x-2$

a) Calcule sus ceros o raíces.

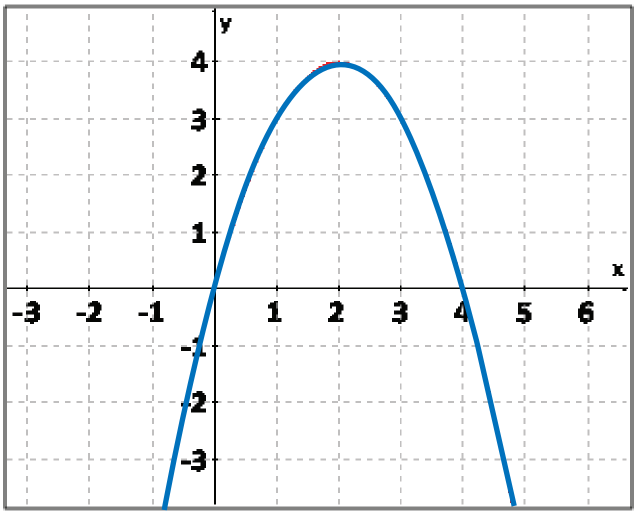
b) Indique intersección con el eje "y".

c) Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

d) Represéntelas gráficamente.

e) Halle la forma canónica, y cuando sea posible, la forma factorizada.

4. A partir de la observación de la gráfica, complete con V las correctas y justifique las falsas.



a) La expresión de la función asociada a la gráfica es: $f(x) = x^2 + 4x$

b) La ecuación del eje de simetría es: $x = 2$

c) Las coordenadas del vértice son: V(4,2)

d) $f(1) = 3$

e) $f(0) = 4$

f) Su forma canónica es: $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

g) Su forma factorizada es: $f(x) = -x.(x+4)$

h) Su conjunto imagen es (-∞ , 4)

3.7.4. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

POR EJEMPLO

Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 40t - 16t^2$

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?

d) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 20 pies

Solución: para poder contestar estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función $h(t)$, y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

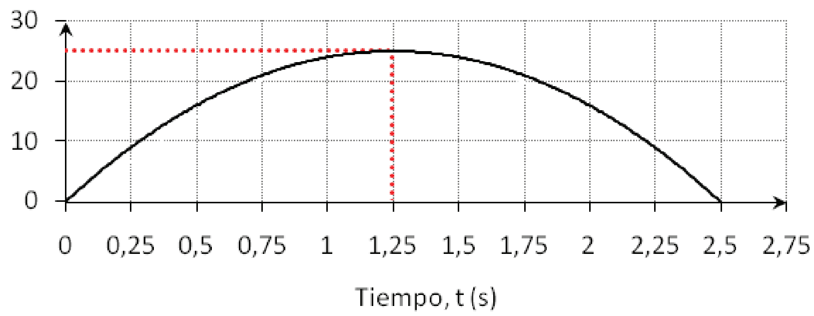
• **Coeficiente del término cuadrático:** -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).

• **Ceros o raíces:** $-16t^2 + 40t = 0$ que resolviendo dan: $x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \frac{5}{2}$

• **Coordenadas del vértice: V(xv ; yv)**

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-40}{2.(-16)} = \frac{5}{4} \quad , \quad y_v = -16.\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 40.\frac{5}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad V\left(\frac{5}{4}, 25\right)$$

• **Ordenada al origen:** $h(0) = 40.0 - 16.0^2 = 0$



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima 25 pies (y v) a los 1,25s (x v); y cae al piso a los 2,5 s (cero o raíz).

Para calcular el tiempo necesario para alcanzar una altura determinada, planteamos la ecuación cuadrática: $h(t) = -16t^2 + 40t$

$$20 = -16t^2 + 40t \quad \rightarrow \quad 0 = -16t^2 + 40t - 20$$

Entonces, las respuestas al problema son:

a) La altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 pies.

b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.

c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.

d) La pelota tarda en alcanzar 20 pies de altura, 0,69 y 1,8 segundos aproximadamente.

EJERCITACIÓN

1. En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados, a los t años está dado por:

$$N(t) = -t^2 + 21.t + 100$$

a) ¿Colocaría alguna restricción para t? ¿Por qué?

b) ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?

c) ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿cuándo ocurrirá?

d) ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?

2. El desplazamiento S de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t, está dado por:

$$S (t) = 3,2 t2 -16t + 28,7$$

Donde S está en metros y t en segundos

a) ¿Para qué valores de t ocurre el desplazamiento mínimo?

b) ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto?

c) ¿Cuál es el desplazamiento para t = 2?

3. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función f(z) =1.000z-2z2, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica al mes.

a) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

b) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? y ¿375 pares?

3.8. SÍNTESIS

FUNCIONES

Definición
Dado un conjunto A y un conjunto B, una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de **existencia** y **unicidad.**
Llamamos **x** a los elementos del conjunto A, a los elementos del conjunto B los llamamos **y**.

El **dominio de la función** es el conjunto al que pertenecen los elementos para los cuales la función está definida, es decir, es el conjunto de elementos que tienen imagen.
Dominio coincide con A.

El **conjunto imagen** es el conjunto al que pertenecen todas las imágenes de los elementos del dominio. **La imagen está incluida en B.**

Ceros o raíces son los valores de la variable independiente que pertenecen al dominio y anulan la función.

Ordenada al origen es el valor que toma la función cuando la variable independiente es cero.

FUNCIÓN AFÍN

Definición
La función afín es una función de la forma

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x) = a\,x + b$$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$

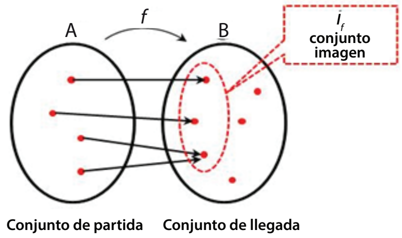
a es el coeficiente del término lineal
b es el término independiente

Cuando b = 0 la función recibe el nombre de FUNCIÓN LINEAL.

Notación funcional

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

x: variable independiente
y: variable dependiente

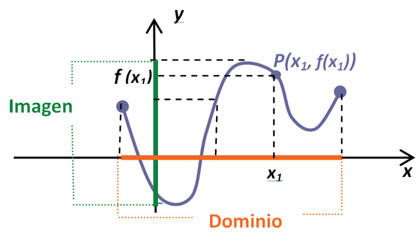


$D \equiv A \qquad D \equiv A$

x = a es un cero o raíz de f

Si $a \in D$ y $f(a) = 0$

Si $x = 0 \in D$ $f(0) \to$ ordenada al origen



Ordenada al origen

La gráfica de una función afín es una **RECTA**

a gráficamente representa la **pendiente** de la recta

b ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas

La pendiente nos indica cuantas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, por cada unidad que aumenta la variable independiente.

Raíz

Es el valor de x que anula la función

$$f(x) = ax + b$$

$$0 = ax + b \rightarrow -b = ax \quad x = -\frac{b}{a}$$

Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

$$f(x) = ax + b$$
$$f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Representación gráfica

• *A partir del valor de la pendiente y ordenada:*

Nos ubicamos en la ordenada al origen y subimos o bajamos, según el signo, la cantidad que corresponde al numerador de la pendiente. Luego hacia la derecha, corremos la cantidad de unidades que figura en el denominador de la pendiente.

• *Por tabla de valores:*

Reemplazamos dos valores de x en la expresión de la función y obtenemos su imagen, uniendo esos dos puntos graficamos la recta.

Obtención de la ecuación de la recta conocidos dos puntos

Sea $P_1 (x_1, y_1)$ y $P_2 (x_2, y_2)$

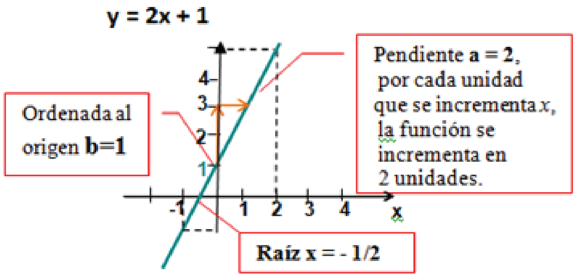
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

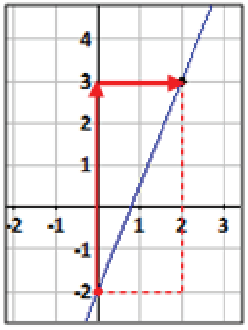
$$y - 2 = \frac{5-2}{3-1}(x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



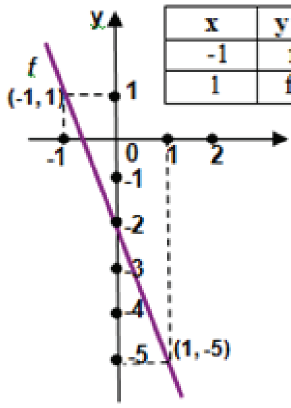


Ordenada al origen b = -2

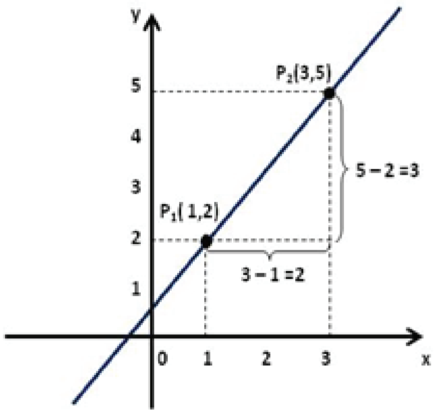
Pendiente $a = \frac{5}{2}$

Subo 5 unidades en y
Corro dos unidades a la derecha en x

$$y = \frac{5}{2}x - 2$$



x	y = -3x -2	P(x,y)
-1	f(-1)= 1	(-1,1)
1	f(1) = -5	(1, -5)



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Definición

La función cuadrática es una función de la forma **f : IR → IR**

$$x \to y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$

a es el coeficiente del término cuadrático
b es el coeficiente deltérmino lineal
c es el término independiente

Raíces

Son los valores de x que anulan la función.
Tiene dos raíces iguales o ninguna
$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

$$f(x) = ax^2 + b\,x + c$$
$$f(0) = a.0 + b.0 + c \to f(0) = c$$

Representación gráfica

Eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2.a}$$

Vértice

$$V\left(\frac{-b}{2.a}, f\left(\frac{-b}{2.a}\right)\right)$$

Conjunto imagen

$a > 0$ Img f $= [\, y_v , \infty \,[$

$a < 0$ Img f $=]\!-\infty , y_v \,]$

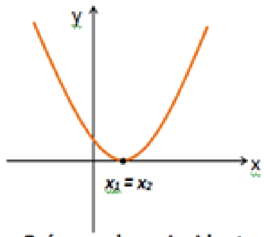
La gráfica de una función cuadrática es una **PARÁBOLA**

a gráficamente da la orientación de las ramas:
a > 0 ramas hacia arriba
a < 0 ramas hacia abajo

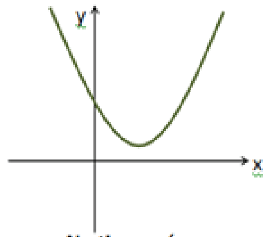
b dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.

c ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas.

Gráficamente las raíces son los puntos donde la gráfica corta al eje de abscisas.



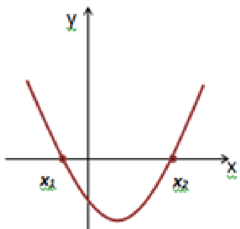
Raíces reales coincidentes



No tiene raíces reales

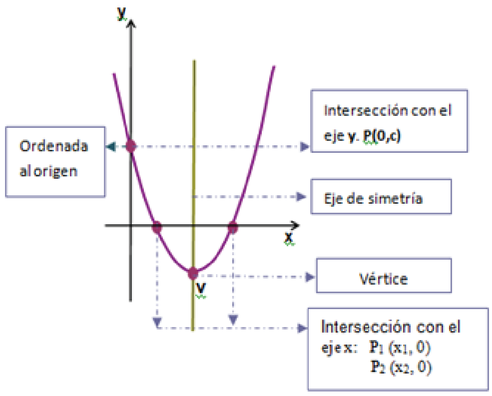
$x_1 = x_2 \to$ igual a x_v
$y_v = 0$

No hay intersección con los ejes



Raíces reales distintas

$x1 \neq x2$ hay dos puntos de intersección con los ejes



3.9. EJERCITACIÓN PARA EL ESTUDIANTE

Contenidos conceptuales

FUNCIONES

Interpretación de gráficos. Función afín. Definición y representación gráfica. Ecuación general de la recta. Función cuadrática. Definición. Representación gráfica. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

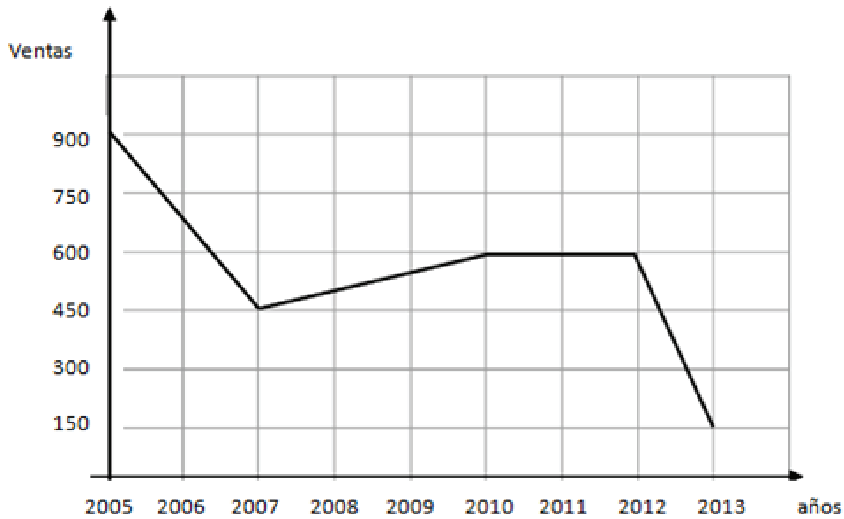
• Desarrollar habilidad para diferentes formas de expresión de función lineal y cuadrática
• Representar gráficamente funciones en ejes cartesianos
• Interpretar los contenidos en la resolución de problemas
• Desarrollar diversas estrategias para la resolución de situaciones problemáticas

FUNCIÓN AFÍN

Análisis de la función a partir de su representación gráfica.

Ejercicio 1:

El siguiente gráfico representa la cantidad vendida de televisores entre los años 2005 y 2013.



a) Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema.

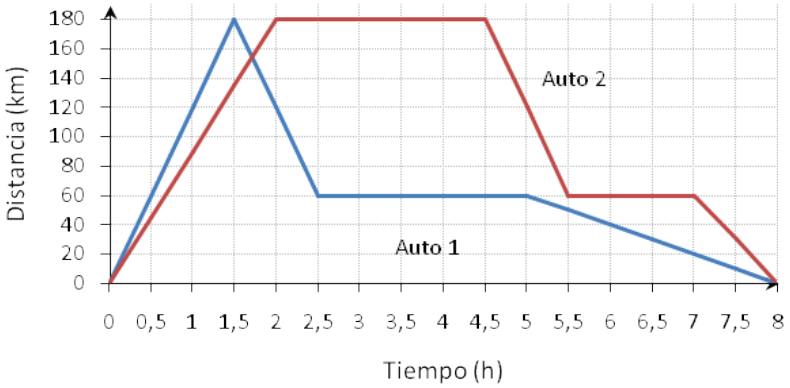
b) Cuántos televisores se vendieron en el año 2013.

c) Entre qué años las ventas se mantuvieron constantes.

d) Qué ocurrió con las ventas en el periodo 2005- 2007.

Ejercicio 2:

Las siguientes gráficas corresponden a dos autos que salen de una misma ciudad A y regresan a ella después de hacer una excursión.



a) ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

b) ¿Qué distancia recorrió cada auto durante la primera hora y media del viaje?

c) Los ocupantes de ambos vehículos se detienen a comer y a descansar. ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

d) ¿En qué vehículo viajan los que a la vuelta de la excursión se detienen a tomar unos refrescos? ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

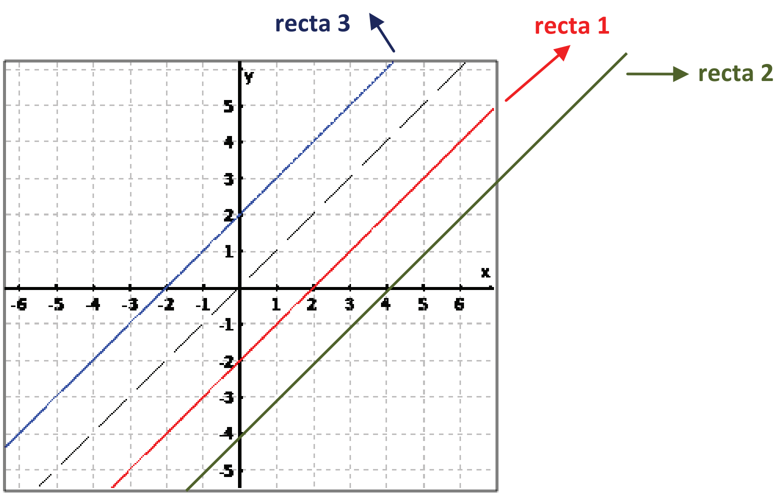
e) ¿Cuántos km recorrieron durante la excursión?

Respuestas:

a) El viaje duró 8 horas.
b) Auto 1: Recorrió 180 km. Auto 2: Recorrió 130 km.
c) Se detienen durante 2,5 hs.
d) Viajan en el auto 2. Se detienen durante 1,5 hs.
e) Recorrieron 360 km.

Obtención de la ecuación de la recta a partir de un gráfico.

Ejercicio 3:



Para cada una de las rectas representadas encontrar:

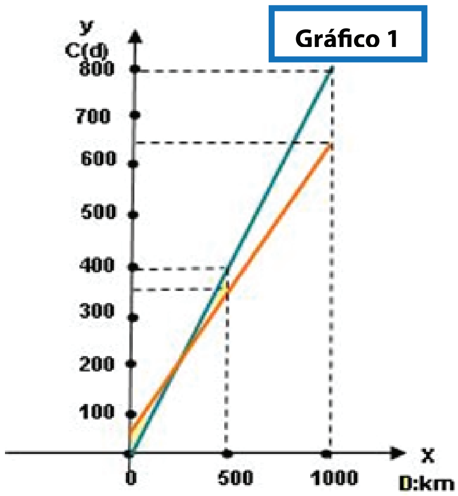
a) La ecuación.
b) La raíz.
c) La ordenada al origen.

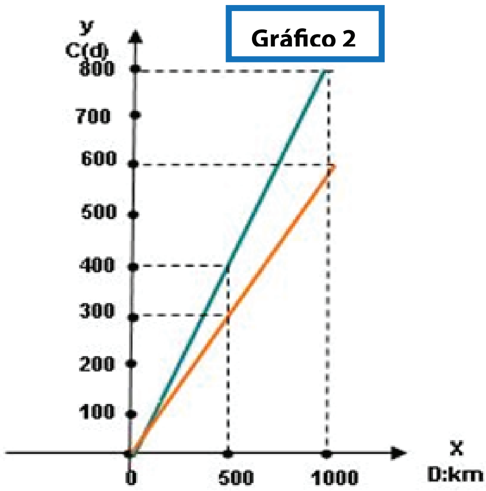
Rtas:

a) Recta 1: f(x) = x -2	Recta 2: f(x) = x	Recta 3: f(x)= x +2
b) Raíz x = 2	Raíz x = 0	Raíz x = -2
c) Ordenada y = -2	Ordenada y = 0	Ordenada y = 2

Ejercicio 4:

Matías quiere realizar un viaje de 1000 km. Para ello visita dos empresas que le brindan la siguiente información. En la primera, el costo es de \$0,8 por kilómetro recorrido y en la segunda, se paga un costo fijo de \$50 y \$0,6 por kilómetro recorrido. Es importante tener en cuenta que en ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente".





a) ¿Cuál de los dos gráficos representa el problema planteado? Justifica la respuesta
b) ¿Cuál es la ecuación de la recta corresponde a cada gráfico?
c) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

Respuestas

a) Gráfico 1. Porque una de las recta tiene ordenada al origen b = 50 que corresponde al costo fijo.

b) Primera empresa: f(x) = 0,8 x   Segunda empresa: f(x) = 0,6 x +50

c) Para las dos empresas el conjunto dominio es: D(f) =[0; 1.000]
Conjunto imagen:
Primera empresa: Im(f) = [0; 800]
Segunda empresa: Im(f) = [50; 650]

Para cada una de las rectas representadas encontrar:

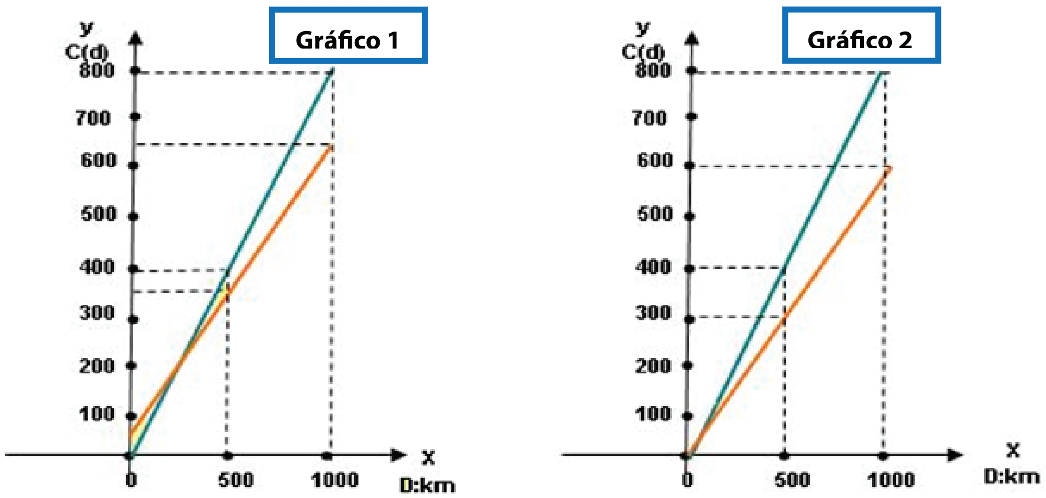
a) La ecuación.
b) La raíz.
c) La ordenada al origen.

Rtas:

a) Recta 1: f(x) = x -2	Recta 2: f(x) = x	Recta 3: f(x)= x +2
b) Raíz x = 2	Raíz x = 0	Raíz x = -2
c) Ordenada y = -2	Ordenada y = 0	Ordenada y = 2

Ejercicio 4:

Matías quiere realizar un viaje de 1000 km. Para ello visita dos empresas que le brindan la siguiente información. En la primera, el costo es de $0,8 por kilómetro recorrido y en la segunda, se paga un costo fijo de $50 y $0,6 por kilómetro recorrido. Es importante tener en cuenta que en ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente".



a) ¿Cuál de los dos gráficos representa el problema planteado? Justifica la respuesta
b) ¿Cuál es la ecuación de la recta corresponde a cada gráfico?
c) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

Respuestas

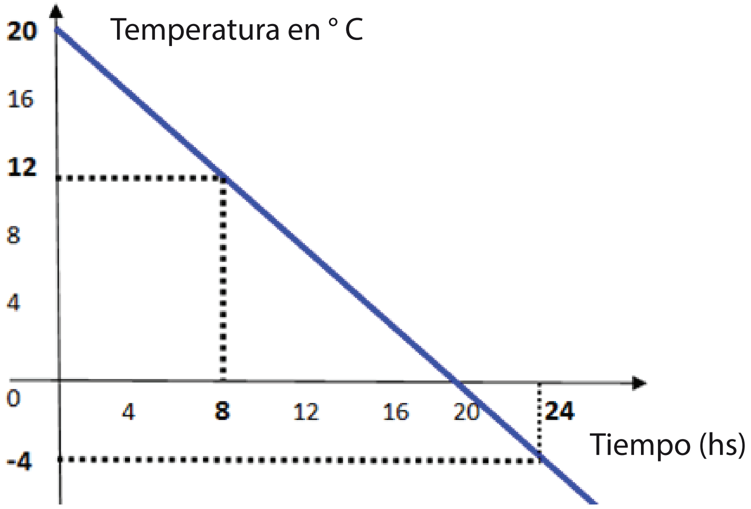
a) Gráfico 1. Porque una de las recta tiene ordenada al origen b = 50 que corresponde al costo fijo.

b) Primera empresa: f(x) = 0,8 x Segunda empresa: f(x) = 0,6 x +50

c) Para las dos empresas el conjunto dominio es: D(f) =[0; 1.000]
Conjunto imagen:
Primera empresa: Im(f) = [0; 800]
Segunda empresa: Im(f) = [50; 650]

Ejercicio 5:

El siguiente gráfico representa la temperatura medida en un laboratorio de una cierta sustancia durante 24 hs.



a) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?
b) ¿Qué temperatura se registró al inicio de la medición?
c) ¿En algún momento la temperatura fue de cero grado?
d) ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta?
e) ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa gráficamente la situación planteada?
f) ¿Qué temperatura se registró a las 3 y media de la mañana?

Respuestas:

a) Conjunto dominio D(f) = [0; 24]. Conjunto imagen Im(f) = [-4; 20].
b) En t = 0, se registraron 20° c.
c) A las 20 hs. La temperatura fue de cero grado.
d) La pendiente de la recta es a = -1, significa que la temperatura disminuye 1°C cada hora.
e) La ecuación de la recta es: $f(x) = -x + 20$
f) Se registraron 16,5 ° C.

Representación de la función afín por tabla de valores.

Ejercicio 6:

Dadas las siguientes funciones:
$f(x) = -5x + 10$
$g(x) = 3x - 8$

a) Asignar dos valores a x para construir una tabla
b) Graficar
c) Determinar: pendiente, ordenada al origen y raíz

Ejercicio 7:

Indicar los pares ordenados que pertenecen a la recta $y = \frac{3}{5}x + 9$

a) (-5; -6) **b)** (- 2; 39/5) **c)** (3; 18) **d)** (4; 3) **e)** (10/3; 11)

Respuesta: b) y e)

Ejercicio 8:

Encuentre la fórmula para calcular la cantidad de vino que queda cada día en una pileta de la que se sacan de manera uniforme, siendo la cantidad inicial de 2300 litros y los datos diarios son los siguientes:

Día	1	2	3
Litros de vino	2250	2200	2150

a) Si se continúan sacando 50 litros por día, ¿en cuántos días se vacía la pileta?
b) ¿Cuándo le quedarán 1300 litros?

Respuestas:

La fórmula que me permite calcular la cantidad de vino es $f(x) = -50x + 2.300$

a) La pileta se vacía en 46 días.
b) A los 20 días le quedarán 1.300 litros

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejercicio 9:

Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas

a) $f(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = 4 - x^2$

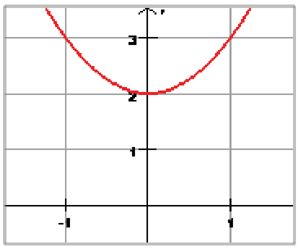
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

• Encuentre su conjunto imagen
• Calcule sus ceros o raíces.
• Indique intersección con el eje "y".
• Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
• Represéntelas gráficamente.

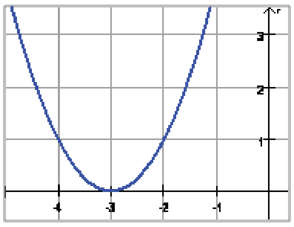
Respuestas:

a) $f(x) = x^2 + 2$



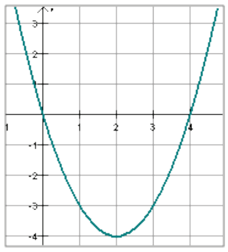
- Conjunto imagen [2; ∞[
- Ceros o raíces: no tiene raíces reales
- Ordenada al origen c = 2
- Vértice (0; 2)   Eje de simetría: recta x = 0

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$



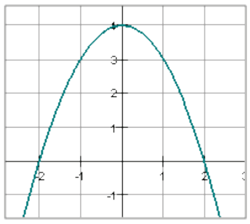
- Conjunto imagen [0; ∞[
- Ceros o raíces: x1 = x2 = -3
- Ordenada al origen c = 9
- Vértice (-3; 0)   Eje de simetría: recta x = -3

c) $f(x) = x^2 - 4x$



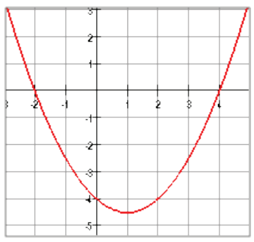
- Conjunto imagen [-4; ∞[
- Ceros o raíces: x1 = 0   x2 = 4
- Ordenada al origen c = 0
- Vértice (2; -4)   Eje de simetría: recta x = 2

d) $f(x) = 4 - x^2$



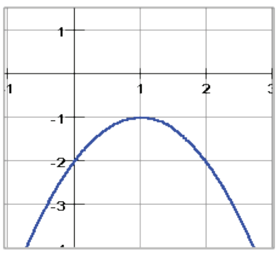
- Conjunto imagen]- ∞; 4]
- Ceros o raíces: x1 = -2   x2 = 2
- Ordenada al origen c = 4
- Vértice (0; 4)   Eje de simetría: recta x = 0

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$



- Conjunto imagen [-9/2; ∞[
- Ceros o raíces: x1 = -2   x2 = 4
- Ordenada al origen c = -4
- Vértice (1; 9/2)   Eje de simetría: recta x = 1

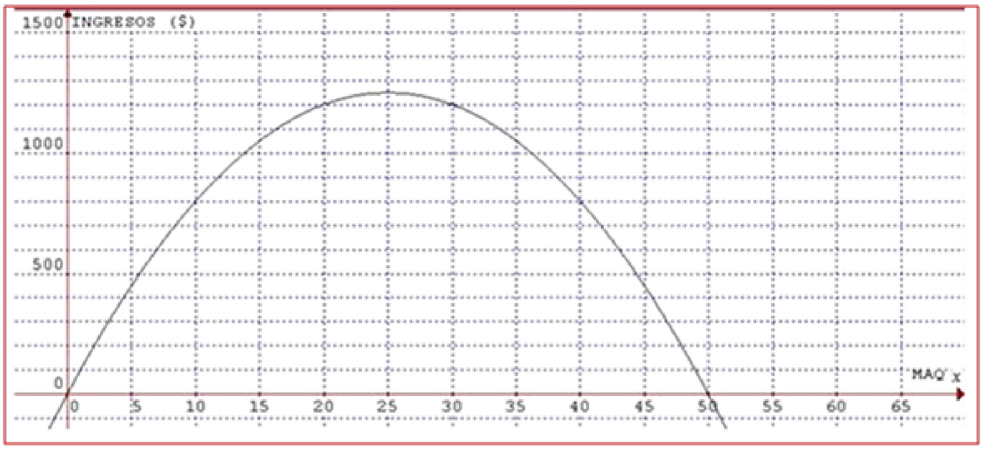
f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$



- Conjunto imagen]- ∞; -1]
- Ceros o raíces: no tiene raíces reales
- Ordenada al origen c = -2
- Vértice (1; -1)   Eje de simetría: recta x = 1

Ejercicio 10:

Los ingresos mensuales en una fábrica de máquinas electromecánicas están dados por la función: $f(x) = 100x - 2x^2$
Observar el gráfico y responder:



a) ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
b) Si decimos que el ingreso fue de $1000 aproximadamente ¿Cuántas máquinas se fabricaron?
c) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 40 máquinas?
d) ¿A partir de qué cantidad de máquinas se comienza a tener pérdida? ¿Tiene relación con las raíces? Justifique su respuesta.