Ingreso 2020

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Autoridades de la UNCuyo
Rector
Ing. Agr. Daniel Ricardo Pizzi

Vicerrector
Dr. Prof. Jorge Horacio Barón

Secretaria Académica
Dra. Ing. Agr. María Dolores Lettelier

Autoridades del ITU
Director General
Mgtr. Jorge García Guibout

Vicedirectora
Lic. Prof. Fabiana Molina

Secretario de Administración y Finanzas
Cdor. Pedro Suso

Secretaria de Extensión y Relaciones Institucionales
Lic. Adriana Defacci

Responsable del Área de Gestión Pedagógico-Didáctica
Lic. Prof. Eleonora Valdivieso

Directores y coordinadores

Mendoza
Ing. Gloria Tutera
Mgter. Lic. Rubén Batalla
Ing. Alejandro Fernández
Lic. Rosa Villegas
Ing. Fernando Castro
Ing. Fabián Martín

Luján de Cuyo
Lic. Gabriela Biondolillo

Rivadavia
Lic. Guillermo Barta

San Martín
Lic. Eduardo Ferrer

General Alvear
Pspg. Susana Semenzato

San Rafael
Lic. Romina Pietrelli

Tunuyán
Cdor. Oscar Niemetz

Coordinación de ingreso 2020
Esp. Marianela Aveni Metz

Equipo de producción de materiales de Matemática
Coordinadora: Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Norma Castellino
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño versión impresa
D.G. Noelia Díaz Puppato

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

GUÍA DE TRABAJO N° 0

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

MATERIALES NECESARIOS EN MATEMÁTICAS

Para empezar a trabajar con números y operaciones matemáticas te mencionaremos los materiales o herramientas con las que debés contar siempre que quieras utilizar conceptos matemáticos para aplicarlos en situaciones cotidianas ya sea en física, en matemática o, por ejemplo, para controlar tus gastos personales y muchas más.

He aquí la lista:

- Lápiz.
- Hoja (lisa, a cuadros, a rayas, etc.).
- Goma para borrar lápiz.
- Regla.
- Lapicera (azul, negra, roja, etc.).
- Colores (dos distintos o más).
- Calculadora científica.
- Compás (ese mismo que te sirve para hacer círculos o arcos de circunferencias).
- Transportador (¡sí!, ese para medir ángulos).

CALCULADORA: UNA HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE

¿Cómo uso mi calculadora científica?

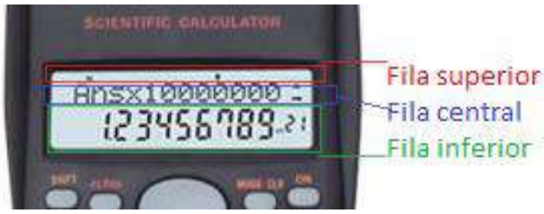
Comencemos desde el principio, una recomendación muy importante es que a partir del inicio del cursado cuentes con una calculadora (esa misma que vas a usar el día de los exámenes). A medida que vayas leyendo este apartado tenela a mano, encendida y probando cada indicación que se te haga. Ahora sí vamos a empezar. Para modelos de calculadoras distintos a los descriptos a continuación, consultá al/la profesor/a de tu curso.

El frente de la calculadora está formado por dos grandes partes: la pantalla o visualizador (en inglés lo conoces como display) y sus teclas.

Pantalla
Visualizador
"Display"

Teclas
Botones
Funciones
Símbolos

En la pantalla se puede observar la información, que en este caso serán números y operaciones matemáticas. El visualizador a su vez se divide en tres filas (dependiendo desde donde la mires vas a poder ver "sombras" en cada fila).



- **Fila superior:** es la fila de las letras pequeñas.

Indica el modo en el que vas a estar trabajando. Más adelante veremos qué modos existen y cuáles usaremos.

- **Fila central:** en esta fila aparecerán los símbolos según el botón que presiones.

Probá apretando consecutivamente los números 2,3 y 4. ¿Qué número aparece?

Ahora presioná la tecla + ("más") y presioná el botón 1 y luego el 0. A continuación apretá la tecla = ("igual"). ¿Qué número aparece debajo de la operación? Debe ser 244. En ese caso, has procedido correctamente. Si no, preguntale al/la profesor/a que te indique cómo hacerlo.

- **Fila inferior:** con la explicación anterior ya debés imaginar la función de esta fila. Es la encargada de indicar el resultado de la operación que has introducido.

Sigamos con la otra parte que nos interesa de la calculadora, cuando te mencionamos las teclas, nos referimos a los botones asociados a las distintas operaciones o números que se representan mediante símbolos. En esta guía, mencionaremos las funciones generales que te servirán para usar la calculadora como herramienta de trabajo.

Las teclas más importantes son:

- ON: permite e**ncen**der la calculadora.
- Shift: se usa para acceder a la segunda función inscrita, generalmente en color amarillo, encima de cada tecla, cuando se presiona la tecla shift se muestra en la pantalla una letra “S”.
- DEL: permite borrar o suprimir el carácter que se encuentra a la izquierda del visualizador.
- AC: permite borrar todo el contenido o fórmula de la pantalla, también puede utilizarse después de un mensaje de error para volver nuevamente a ingresar la operación.
- MODE: te permite observar los distintos modos que tiene tu calculadora.

Vamos con los ejemplos para que pongas en práctica los usos de las funciones mencionadas anteriormente.

Para encender la calculadora basta con presionar la tecla ON
¿Qué ves en el display? Escribí una descripción detallada de lo que viste.

VAMOS AVANZANDO… para realizar cualquier operación es indispensable que conozcas en qué modo vas a necesitar usar la calculadora. Para el nivel de este curso, es suficiente que la utilices en modo “DEGREE” (GRADOS) o “RAD” (RADIANES), para esto, es necesario que te aparezca una letra “D” o “R” en la pantalla, generalmente en la fila superior.

¿No te aparece? Te proponemos dos opciones para solucionar esta situación.

Primero te enseñaremos a reestablecer la configuración según como la calculadora sale de la fábrica. Para ello, una vez prendida, debés presionar el botón Shift y luego la tecla “CLR” (figura en color amarillo al lado de la palabra “MODE” y corresponde con la misma tecla). ¿Qué ves?

Eso que estás viendo es “una pregunta” que te hace la calculadora, quiere decir: ¿Qué queres reestablecer? Debés presionar la tecla asociada al número que está debajo de la palabra ALL suele ser el número “3” (ALL traducido al castellano significa: “todo”). Al presionar el número “3” aparece la siguiente frase “Reset All” eso es “una pregunta” que te reitera la calculadora para confirmar la operación. La forma de responder que “SÍ” es presionando la tecla = (“igual”).

Luego de presionar esa tecla, aparecerán líneas punteadas, lo que significa que has reestablecido al formato original. Presiona la tecla AC para continuar.

¿Aún sigue sin aparecer esa deseada letra "D"? Bueno vamos a probar la segunda opción. En esta oportunidad vamos a aprovechar para introducirte al uso de la función MODE:

Una vez encendida la calculadora, debés presionar la tecla MODE las veces que sea necesario hasta que te aparezca la palabra "Deg" en el visualizador. Dependiendo el modelo de la calculadora eso ocurrirá luego de dos o tres veces. Al aparecer la leyenda "Deg" presioná la tecla asociada al número que corresponda, generalmente es el número uno. De esta forma, sí o sí debe aparecerte la letra "D" en la fila superior. Eso es todo.

Operaciones aritméticas

Te proponemos introducir el siguiente cálculo con las operaciones de multiplicación división y signos negativos. Para valores negativos se aconseja utilizar la tecla de números negativos, para ello, tenés que presionar la tecla +/- o (-) según el modelo.

Ejemplo: introducí en el display la siguiente expresión

53 x (-13)/(-12) luego presiona el botón= ("igual").

El resultado que debe aparecer es: **57.416666667**
¿Salió a la primera? Entonces vas por buen camino. Si no es así, volvé a la lectura de las explicaciones anteriores.

Funciones trigonométricas elementales

A continuación te dejamos el siguiente video para que veas cómo es el uso de las funciones trigonométricas.
Funciones trigonométricas elementales mediante el uso de la calculadora:

https://www.youtube.com/watch?v=L4YT2q47pyM

Ecuación de segundo orden

La siguiente explicación te servirá para aprender a obtener las raíces de la fórmula de **Bhāskara,** conocida como fórmula cuadrática o resolvente, (ecuación de segundo orden).

Las calculadoras científicas tienen una función que sirve para resolver la llamada **fórmula resolvente**, que es la que debe utilizarse cuando queda una ecuación **de segundo orden** como por ejemplo:$2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Bueno, para resolver esta ecuación, encendé la calculadora y apretá la tecla MODE hasta que veas la leyenda" **EQN" (ecuaciones)**. Luego presioná la tecla del número 1.

Aparecerá la palabra **UNKNOWNS?**, pero no es esto lo que nos interesa.

Entonces apretá la flecha del cursor REPLAY hacia la derecha y vas a encontrar la leyenda **DEGREE?** Presiona la tecla del número 2 y te aparecerá lo siguiente:" **a?**" eso significa que la calculadora te esta preguntando ¿cual es el valor de la primera incógnita?. Vas a responder con el valor de la X^2. Retomando el ejemplo de $2x^2 - 3x - 5 = 0$, tenés que introducir el número 2; y luego la tecla = ("igual").
Del mismo modo, agregás el valor "**b?**" (Para nuestro ejemplo, es el -3) y luego la tecla = ("igual"). Finalmente, el valor del número sin x que figura en el display como "**c?**" (el cuál vendría a ser el -5) y luego la tecla = ("igual").

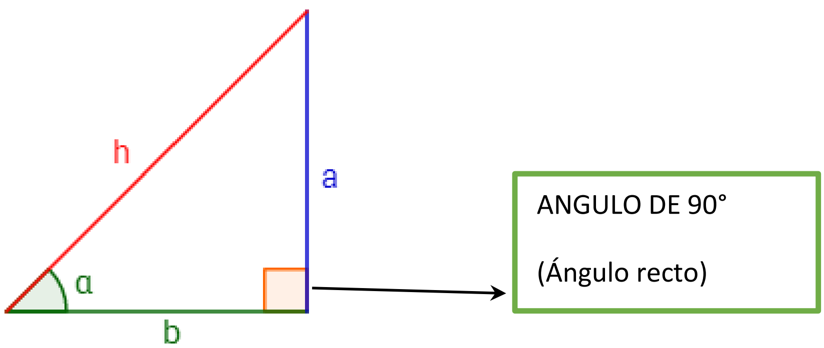
Al presionar la tecla = ("igual"), te va a aparecer X1= y el valor de la primera X (para este caso es el número 2,5); y si apretamos de nuevo la tecla = ("igual"), te va a decir el valor de la segunda X (en este caso también es -1).

Para volver al modo de calculadora normal apretá **MODE** y elegí **COMP** con la tecla 1.

NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA

En esta sección trataremos brevemente algunas herramientas de cálculo que te servirán mucho para matemática y física

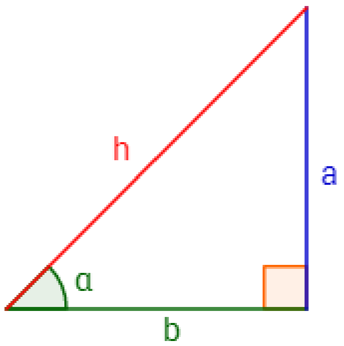
Por si no te acordás… un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos internos mide 90°. Este dato es importante, ya que, a partir de esa característica se pueden realizar diversas operaciones que seguramente aplicarás durante el cursado.



Si conocemos dos lados de un triángulo rectángulo, podemos calcular el otro lado aplicando el teorema de Pitágoras. Si no recordás como es la fórmula del teorema, a continuación mirá el video explicativo:

https://www.youtube.com/watch?v=J4QbmOqgVvg

Seguimos, en ocasiones no conocemos dos lados, pero sí conocemos uno de los otros dos ángulos no rectos. En estos casos, es cuando utilizamos el **seno** o el **coseno.**



$$\cos(\alpha) = \frac{b}{h}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{h}$$

El coseno de un ángulo "α" se define como el cociente (división) del lado contiguo al ángulo "α", en este caso lo llamamos "b" y la hipotenusa que la llamamos "h".
El seno de "α" se define como el cociente del lado opuesto al ángulo "α" denominado con la letra "a" y la hipotenusa.

GUÍA DE TRABAJO N° 1

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Conjuntos numéricos

Un conjunto numérico es una agrupación de números que cumplen con una serie de propiedades.

1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

La noción de número y la de contar han acompañado a la humanidad desde la prehistoria. La causa para que el ser humano comenzara a contar surgió, fundamentalmente, de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza, porque percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee y su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida. Por ejemplo, los cazadores marcaban señales en un palo para saber cuántos animales habían abatido en la cacería.

Tuvieron que pasar muchos años para que el hombre fuera cambiando su forma de vida: de cazador y recolector, pasó a ser, además agricultor y ganadero. Por ejemplo, cuando un pastor llevaba sus ovejas a pastar al campo, metía una piedra en su alforja. Luego, cuando las encerraba después del pastoreo, la cantidad de animales debía coincidir con la cantidad de piedras guardadas. Por cada oveja que encerraba, sacaba una piedra de su alforja, si había más piedras que ovejas, significaba que alguna se había perdido. Comparando cantidades es como el hombre comenzó a construir el concepto de número.

Piedras usadas por los sumerios en el intercambio comercial.
(Aproximadamente en el año 9000 AC)

El conjunto de los números naturales es aquel conjunto que permite contar. Su primer elemento es 1, a cada número natural le sigue otro que se obtiene agregándole o sumándole una unidad a este, dicho número es su sucesor, lo podemos esquematizar como:

$\boxed{1} \rightarrow \boxed{1+1=2} \rightarrow \boxed{2+1=3} \rightarrow \ldots$ n+1 es el sucesor de n

2 es sucesor de 1

3 es sucesor de 2

Un número natural y su sucesor se llaman consecutivos

De esta manera se construye el **conjunto de los Números Naturales** que utiliza el símbolo **IN.**

$$\boxed{\textbf{IN} = \{1, 2,3,..., n, n+1,...\}}$$

POR EJEMPLO

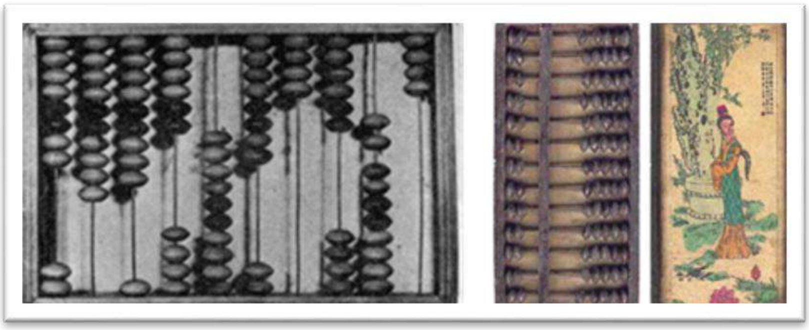
Si sumamos dos números naturales, obtenemos otro número natural 5+ 8 =13, si los restamos 5- 8 = -3, el resultado no es un número natural, por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales a los números enteros.

2. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números que hoy llamamos negativos, durante muchísimos años, fueron conocidos como "Números Falsos". En el Siglo V, en Oriente, se manipulaban números positivos y negativos utilizando ábacos, tablillas o bolas de diferentes colores. Cuando los grandes matemáticos de la época resolvían ecuaciones que daban resultados negativos, solían llamarlos absurdos porque aquéllas soluciones eran imposibles. Ya, mucho antes que ellos, los comerciantes chinos usaban en sus cuentas dos colores: los números de las deudas en color rojo y los que no lo eran en color negro.

Sin embargo, los indios fueron los primeros en interpretar los números positivos y negativos, como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.

*A partir del siglo XV, algunos matemáticos muy conocidos comenzaron a utilizar los números negativos en sus trabajos. Stifel, popularizó el uso de los signos "+" y "-" para diferenciar los números positivos y negativos. Hasta entonces, se utilizaba la palabra latina minus que significa menos, o su abreviatura **m***



ÁBACOS ANTIGUOS

Vimos que la operación diferencia *5 - 8,* no puede efectuarse en los números naturales. Para superar esta dificultad introducimos:

- el número cero 0
- para cada número natural *a* el número negativo *-a*, llamado *opuesto* de *a*

Los números naturales se denominan *enteros positivos* y sus opuestos, *enteros negativos.*

POR EJEMPLO

El opuesto del número 2 es el número negativo -2.

Los números enteros positivos, los números enteros negativos y el número cero, dan lugar al *conjunto de los Números Enteros*, al cual notaremos con **Z**.

$$\boxed{\mathbf{Z} = \{ \ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots \}}$$

En este nuevo conjunto, 0 es el *elemento neutro* para la suma, es decir:

$0 + a = a + 0$ para todo número entero a.

Las operaciones suma, resta, producto entre números enteros, da siempre otro número entero.

¿Qué pasa si queremos efectuar una división con números enteros?

$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{-6}{3} = -2 \qquad \frac{4}{3} = ?$ Su resultado no es un número entero

Lo mismo sucede si hablamos de tres cuartos de kilogramo, dos toneladas y media o de medio año. Surge entonces la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a los números racionales.

3. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Todos los años, en el Antiguo Egipto, hacia el mes de julio, el río Nilo crecía e inundaba todas las tierras de labranza. Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría porque gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía en sus aguas.

La inundación duraba hasta el mes de septiembre. En esas fechas, el faraón enviaba a los agrimensores a medir los campos para repartir los terrenos entre los campesinos.

Esta medición la hacían con cuerdas anudadas a una misma distancia. A los agrimensores les asaltó un gran problema: había veces que al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda, ellos tenían que verificar que cada campo tuviera un determinado número de cuerdas por cada lado, ya que era la unidad de medida con la contaban. Solucionaron este problema inventando un nuevo tipo de número, el fraccionario, que era la razón de dos números enteros.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones. A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. A finales del siglo XVI, SimonStevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada. Por ejemplo: al número 456,765 lo escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3)

En el siglo XVII, aparecieron los números decimales tal y como los escribimos hoy: separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (ca. 1170 - 1250), también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración arábiga actual- mente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero; y por idear la sucesión de Fibonacci.

Definimos el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

Los números racionales o fraccionarios se representan por el cociente de dos números enteros, llamados numerador y denominador respectivamente, siendo el denominador distinto de cero.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{a}{b} \; con \; a \; y \; b \; enteros \; y \; b \neq 0\right\}$$

Notemos que todo número entero a es racional, pues se puede representar como la fracción $\frac{a}{1}$. Para esto introducimos, los números fraccionarios, que surgen de la razón o cociente entre dos números enteros $r = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, con $b \neq 0$

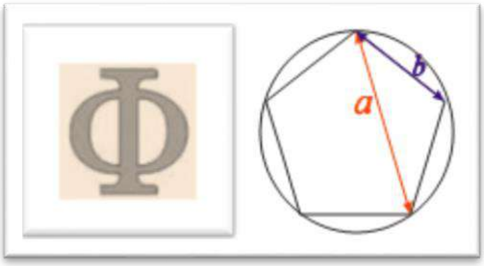
Los números racionales, tienen representación decimal exacta, esto significa que al dividir se obtiene un cociente y el resto es cero. Podemos decir que la escritura decimal de un número racional es, o bien un número decimal finito, o bien periódico.

POR EJEMPLO

$\frac{3}{5} = 0{,}6 \; y \; \frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots$ En ambos casos el resto de la división es cero, pero en el segundo ejemplo la cifra decimal 3 se repite indefinidamente, este tipo de números fraccionarios se llaman periódicos.

4. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los griegos, en el siglo VII a.C., descubrieron las magnitudes irracionales. Son números que no pueden ser expresados a través de una fracción. El origen de los números irracionales, fue motivado por el uso de cálculos geométricos que aparecían relacionados con el llamado **número áureo o número de oro**, que es el cociente entre la diagonal a, de un pentágono regular y el lado b del mismo.



Un número nada fácil de imaginar, que convive con la humanidad (porque aparece en la naturaleza y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño), es el llamado número de oro o también sección áurea, proporción áurea, razón áurea o número de Fidias.

Se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y artes.

El primer matemático en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides, quién demostró que este número no puede ser descripto como la razón de dos números enteros, es decir, que es un número irracional. Otros dos números irracionales muy conocidos son **π** y ***e***. El número **π** se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Los antiguos egipcios (hacia 1600 a.C.) ya sabían que existía esta relación. Recién en el año 1761 Lambert demuestra formalmente que el número **π** es irracional.

El número irracional ***e*** aparece en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de Napier, no obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Bernoulli. En el año 1727 Euler comenzó a utilizar la letra ***e*** para identificar la constante.

5. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Todos los números racionales e irracionales forman el **conjunto de los números reales**, en símbolos **IR**.

Veamos la representación gráfica de todos los conjuntos explicados anteriormente.

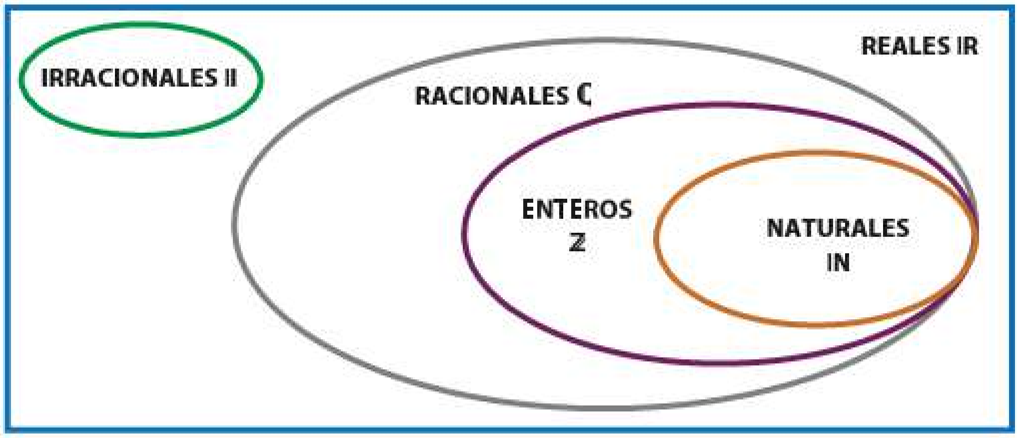


Gráfico Nº 1: Conjunto de los números reales

El diagrama anterior podemos esquematizarlo de la siguiente manera:

Números naturales: **N**
0 (cero)
Números negativos

Números enteros: **Z**

Números fraccionarios

Números racionales: **Q**

Números irracionales: **I**

Números reales: **R**

Esquema Nº 1: Conjunto de los números reales

Los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por **comprensión** utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos, o por **extensión** cuando se nombran todos sus elementos. Si trabajamos con conjuntos numéricos, esto último solo se puede aplicar a los números naturales y enteros, dado que es posible conocer en estos conjuntos el elemento anterior y el posterior.

POR EJEMPLO

Si llamamos A al conjunto formado por los números naturales menores que 6, lo escribimos:

- Por comprensión $A = \{^{x}/_{x} \in IN \wedge x < 6\}$
- Por extensión $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vamos a ver relaciones y propiedades importantes entre conjuntos, que se necesitarán en el desarrollo del tema: Pertenencia e inclusión.

PERTENENCIA

Cuando queremos establecer una relación entre elemento y conjunto.

La pertenencia se designa con el símbolo ∈ y su negación ∉ indica la no pertenencia.

- En el ejemplo anterior: 2∈A y 6∉ A

INCLUSIÓN

Se dice que un conjunto B está incluido en otro conjunto A, cuando todos los elementos de B pertenecen al conjunto A.

En símbolos: B ⊂ A ⇒ es un subconjunto de A

En el Gráfico N° 1 podemos observar

$$\begin{cases} \boldsymbol{IN \subset Z \Rightarrow IN\ es\ un\ subconjunto\ de\ Z} \\ \boldsymbol{Q \subset IR \Rightarrow Q\ es\ un\ subconjunto\ de\ IR} \end{cases}$$

POR EJEMPLO

$\boldsymbol{A \subset IN}$ dado que todos los elementos de A pertenecen a IN, de la misma manera, podríamos decir que $\boldsymbol{A \subset Z}$ dado que el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros.

✓ El siguiente video te permitirá comprender y reafirmar mejor los conjuntos numéricos.

https://www.youtube.com/watch?v=4XmJUvF4Pv

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 1

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Conjuntos numéricos

DURACIÓN: 2 horas

1. Leé las siguientes afirmaciones, reflexioná y completá:

   Si tenemos los conjuntos

   $\boldsymbol{A = \{^{x}/_{x} \in IN \wedge x < 5\}}$

   $\boldsymbol{B = \{^{x}/_{x} \in Z \wedge -5 \leq x \leq 5\}}$

   $\boldsymbol{C = \{^{x}/_{x} \in IN \wedge x < 3\}}$

   $\boldsymbol{D = \{^{x}/_{x} \in IN \wedge 3 < x < 6\}}$

   Podemos decir:

   El elemento 5: $\boldsymbol{5 \notin A}$; $\boldsymbol{5 \in B}$; $\boldsymbol{5 \notin C}$; $\boldsymbol{5 \in D}$

   El conjunto $\boldsymbol{A \subset B}$; $\boldsymbol{C \subset A}$; $\boldsymbol{D \not\subset A}$

   ¿Habrá otras relaciones? …….En caso afirmativo completá cuáles:

   ………
   ………
   ………
   ………
   ………

2. Dados los conjuntos: $\boldsymbol{A = \{^{x}/_{x} \in Z \wedge -5 \leq x < 3\}}$ y $\boldsymbol{B = \{^{x}/_{x} \in Z \wedge x \leq 6\}}$

Marcá con una cruz, en la columna de verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, justificá la respuesta.

	VERDADERO	FALSO		VERDADERO	FALSO
$4 \subset A$			$-1 \in A$		
$5 \in B$			$\{1, 4, 6\} \subset B$		
$B \in A$			$\{3, 6, 9\} \in A$		
$\{-5, -4, -3\} \subset A$			$A \subset B$		

3. Marcá con cruz (x) en el casillero que corresponda.

Números	IN (naturales)	Z (enteros)	Q (racionales)	I (irracionales)	R (reales)
-2					
3					
2,36363...					
14					

4. Respondé V o F según corresponda, justificá los falsos

a. El conjunto de los números naturales está conformado por los números positivos y negativos.

b. El conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números racionales.

c. El conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números naturales.

d. Los números fraccionarios pertenecen al conjunto de los números racionales.

GUÍA DE TRABAJO N° 2

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Representación de conjuntos numéricos en la recta

1. REPRESENTACIÓN

Hemos visto que los conjuntos numéricos o subconjuntos de ellos, se pueden definir por comprensión utilizando una expresión proposicional que caracteriza a los elementos o por extensión a los que representaremos en la recta numérica.

POR EJEMPLO

a. Para el conjunto $\boldsymbol{A} = \{^{x}/_{x} \in \boldsymbol{IN} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$su representación en la recta es:
Gráficamente:

b. El conjunto $\boldsymbol{B} = \{^{x}/_{x} \in \boldsymbol{IN}\}$está escrito por comprensión y sus elementos son los números naturales, puede darse por extensión como $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4} \ldots\}$ nótese que se han utilizado puntos suspensivos porque son infinitos los elementos del conjunto, en la recta se lo representa con una flecha, no obstante si se quiere seguir completando el conjunto lo podemos hacer dado que conocemos el sucesor.
Gráficamente:

c. Consideremos $\boldsymbol{C} = \{^{x}/_{x} \in \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{5}\}$ los elementos del conjunto son números enteros. Por extensión es $\boldsymbol{C} = \{\ldots - \boldsymbol{3}, -\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\}$ son infinitos sus elementos por eso ponemos puntos suspensivos.
Gráficamente:

d. Sea $\boldsymbol{D} = \{^{x}/_{x} \in \boldsymbol{Z} \wedge -\boldsymbol{4} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{1}\}$ en el conjunto vemos que el 4 está incluido, no así el número 1. En la recta cuando no se incluye un número natural o entero, se indica dejando el círculo sin rellenar.
Gráficamente:

2. INTERVALO REAL

Si ahora definimos un conjunto sobre los números reales $\boldsymbol{D} = \{{}^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR} \wedge \boldsymbol{x} < \boldsymbol{6}\}$, en este caso, es imposible nombrar los infinitos elementos de D, ya que no es factible nombrar dos números reales consecutivos. Entre dos números cualesquiera de ellos hay infinitos números reales por más próximos que nos parezcan.

De aquí surge el concepto de **intervalo real: como una parte o subconjunto del conjunto IR.**

El conjunto D es el subconjunto que contiene a los infinitos reales menores a 6:

$\boldsymbol{D} =]-\infty, \boldsymbol{6}[$ lo escribimos como un **intervalo abierto** de números reales que se representa con un corchete invertido.

Si los representamos en la recta numérica:

Sea $\boldsymbol{P} = \{{}^{\boldsymbol{x}}/_{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{IR} \wedge -\boldsymbol{3} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{6}\}$ el subconjunto que contiene a los infinitos reales desde el número –3 hasta 6. $\boldsymbol{P} = [-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{6}]$ lo escribimos como el intervalo cerrado de –3 a 6.

En la recta numérica se pueden representar:

La razón de clasificar a los intervalos como abiertos o cerrados está relacionada con el hecho de que el elemento pertenezca o no al subconjunto, si decimos por ejemplo:

x < 5, 5 no pertenece al conjunto

En este caso lo denominamos intervalo abierto en 5, pero si decimos

x ≥ 2, 2 si pertenece al conjunto

Lo denominamos intervalo cerrado en 2.

La notación que utilizaremos para designar los intervalos reales en general es corchete invertido cuando el intervalo es abierto en alguno de sus extremos; y corchete cuando el intervalo es cerrado en alguno de sus extremos.

$[a; b] = \{{}^{x}/_{x} \in IR: a \leq x \leq b\}$ **INTERVALO CERRADO**

$]a; b[= \{{}^{x}/_{x} \in IR: a < x < b\}$**INTERVALO ABIERTO**

$]a; b] = \{{}^{x}/_{x} \in IR: a < x \leq b\}$**INTERVALO SEMIABIERTO A IZQUIERDA**

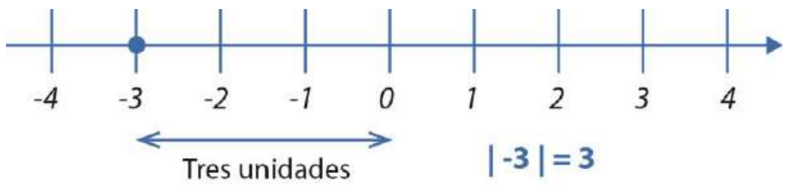
$[a; b[= \{{}^{x}/_{x} \in IR: a \leq x < b\}$**INTERVALO SEMIABIERTO A DERECHA**

Los intervalos se usarán con mucha frecuencia en la descripción del comportamiento de funciones y en la representación del conjunto solución de inecuaciones, entre otros.

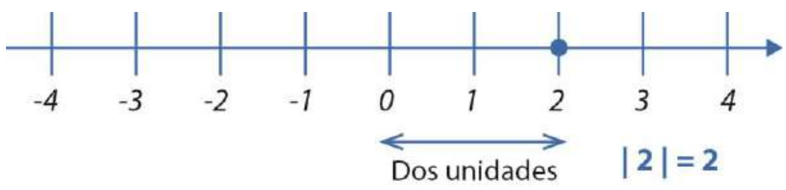
3. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del 0 (cero) sobre la recta numérica.

Se simboliza con barras, por ejemplo | - 3 | representa el valor absoluto de 3. Para obtener su valor, consideramos su distancia al 0. Por tratarse de una distancia es un número siempre positivo.



Si el número al que se le quiere calcular su valor absoluto es positivo, por ejemplo | 2 | el resultado nos da el mismo número por estar ubicado en la recta a la derecha del 0.



Para todo número real x:

|x| = x si x es positivo, en símbolos $x \geq 0$

|x| = - x si x es negativo, en símbolos $x > 0$

En la definición debemos tener en cuenta que el signo menos significa el opuesto del número.

POR EJEMPLO

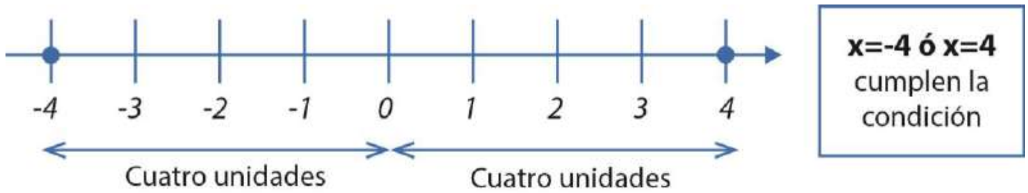
|5| = x   5 es positivo, por lo tanto |5| = 5

|-5| = - x   -5 es negativo, por lo tanto |-5| = - (-5) = 5

El valor absoluto SIEMPRE nos da un número positivo

Podemos escribir conjuntos numéricos por comprensión, utilizando la notación de valor absoluto. En los siguientes ejemplos, consideramos a **x** como elementos de un conjunto.

Si tenemos | x | = 4 se trata de los números cuya distancia al cero es 4. Si lo graficamos vemos que hay dos números que cumplen esta condición.



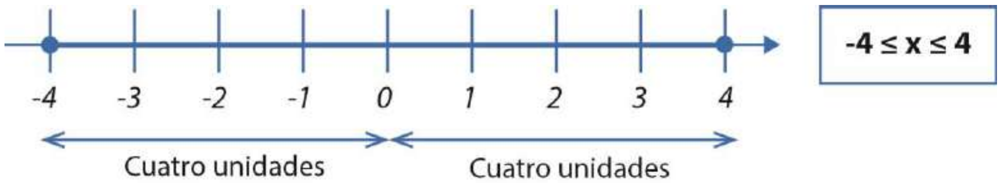
Escribimos el conjunto

- Por comprensión: $A = \{ {}^{x}/_{x} \in Z \ \wedge |x| = 4\}$
- Por extensión: $A = \{-4, 4\}$

Podríamos escribir el conjunto A sobre el conjunto de los números reales:

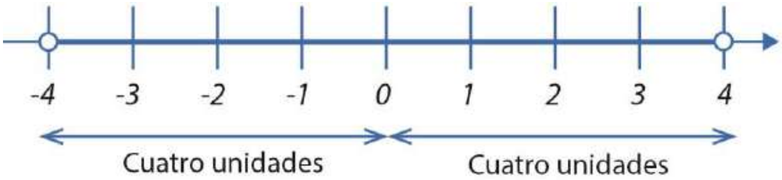
- Por comprensión: $A = \{ {}^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| = 4\}$
- Por extensión: $A = [-4] \cup [4]$

Si en el ejemplo tenemos |x|≤ 4 se trata de los números cuya distancia al cero es menor o igual a 4



- Por comprensión: $A = \{ {}^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| \leq 4\}$
- Por extensión: $A = [-4, 4]$ es un intervalo cerrado

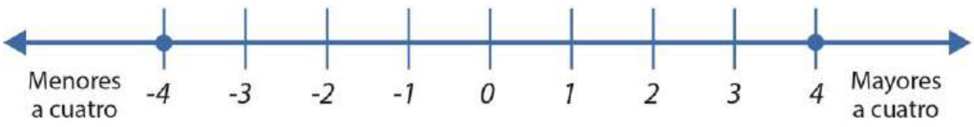
Si ahora consideramos el caso |x| < 4 se trata de los números cuya distancia al cero es menor a 4.



-4 < x < 4

Si tenemos |x| ≥ 4, se trata de los números cuya distancia al cero es mayor o igual a 4.

Gráficamente:



x ≤ -4
ó
x ≥ 4

En este caso tenemos dos intervalos:

- Por comprensión: $A = \{^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x| \geq 4\}$
- Por extensión: $A =]-\infty, -4] \cup [4, \infty[$

Los ejemplos vistos se resumen en las propiedades de valor absoluto.

|x| = k ⇔ x = k ó x = -k

Si: Para todo k positivo, para todo x: |x| ≤ k ⇔ - k ≤ x ≤ k

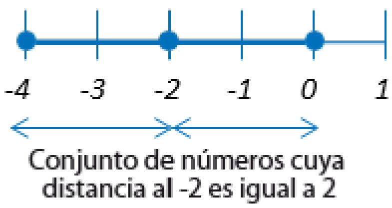
Para todo k positivo, para todo x: |x| ≥ k ⇔ x ≤ - k ó x ≥ k

Todo lo visto es válido para |x-a| ≤ k ó |x+a| ≤ k en el primer caso la distancia no es con respecto al cero, sino en relación al punto a; en el segundo caso se trata de la distancia de x al número (-a)

POR EJEMPLO

$A = \{^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x+2| \leq 2\}$

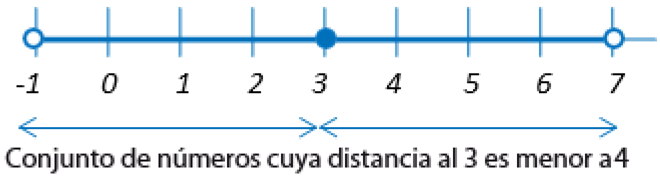
Gráficamente para el conjunto A:



-4 ≤ x ≤ 0

$B = \{ {}^{x}/_{x} \in IR \ \wedge |x-3| < 4\}$

Gráficamente para el conjunto B:



-1 < x < 7

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=RB6N6SlOKqc

https://www.youtube.com/watch?v=yhdmoH_lyeU

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 2

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Representación de conjuntos numéricos en la recta

DURACIÓN: 3 horas

1. Definí por extensión los siguientes conjuntos. Representá en la recta.

   a. $A = \{^{x}/_{x} \in IN \wedge 2 \leq x < 8\}$

   b. $B = \{^{x}/_{x} \in Z \wedge -3 < x \leq 5\}$

   c. $C = \{^{x}/_{x} \in Z \wedge 6 \leq x\}$

2. Definí por comprensión los siguientes conjuntos dados por extensión en Z:

   a. $A = \{\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   b. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   c. $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

3. Expresá por comprensión los conjuntos dados por extensión en IR.

$$A =]-5, 8] \qquad B = [-4, 20] \qquad C = [3, \infty[\qquad D =]-\infty, 10[$$

4. Escribí los siguientes conjuntos por comprensión y extensión.

$A = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge |x + 2| \leq 2\}$ $\qquad$ $B = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge |x - 3| < 4\}$

5. Determiná los elementos de los siguientes conjuntos:

$A = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge |x - 2| < 5\}$ $\qquad$ $B = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge |x + 4| < 2\}$

6. Expresá los siguientes conjuntos como intervalo.

$A = \{x: x \in IR\ ; x > 6\}$ $\quad$ $B = \{x: x \in IR\ ; -4 < x < 4\}$

7. Escribí con notación de intervalo los siguientes conjuntos numéricos dados por comprensión:

$A = \{{}^{x}/_{x} \in IR\ \wedge -6 \leq x \leq 3\}$ $\quad$ $B = \{{}^{x}/_{x} \in IR\ \wedge x \leq 9\}$

$C = \{{}^{x}/_{x} \in IN\ \wedge 10 \leq x < 20\}$ $\quad$ $D = \{{}^{x}/_{x} \in IR\ \wedge -4 \leq x \leq 3\}$

GUÍA DE TRABAJO N° 3

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Operaciones con números reales

Para operar correctamente con números reales, se repasarán algunas reglas básicas para realizar operaciones. Entre las cuales, tendremos en cuenta: m.c.m, M.C.D, suma, multiplicación, división, potenciación y radicación. Se prestará mayor atención a las operaciones con fracciones, dado que son las que presentan mayor dificultad.

El mínimo común múltiplo (abreviado m. c. m), de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos.

Dados dos o más números debemos descomponerlos en factores primos, luego el mínimo común múltiplo será el resultado de multiplicar los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

POR EJEMPLO

Calculá el m.c.m de 60, 45 y 15

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \hline 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ \hline 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2^2.3.5$ $\qquad 45 = 3^2.5$ $\qquad 15 = 3.5$ $\qquad \boxed{\text{m.c.m}\ (60, 45, 15) = 2^2.3^2.5 = 180}$

El máximo común divisor (abreviado M.C.D) de dos o más números naturales, es el mayor número que es divisor de todos ellos.

Dados dos o más números, se deben descomponer en factores primos, luego el M.C.D será el producto de los factores comunes elevados a la menor potencia.

POR EJEMPLO

En el ejemplo anterior: $60 = 2^2 . 3 . 5$ $45 = 3^2 . 5$ $15 = 3 . 5$

$$\boxed{\text{M. C. D } (60, 45, 15) = 3.5 = 15}$$

El 3 y el 5 son los factores comunes.

1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

La adición o sustracción de dos fracciones de igual denominador es otra fracción de igual denominador, cuyo numerador es la suma o resta de los numeradores.

Es decir:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \; con \; b \neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$

b. $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

La adición o sustracción de dos fracciones de distinto denominador es otra fracción, cuyo denominador es el m.c.m de los números de los denominadores de la fracción que cumple:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{p}{b}\right) a \pm \left(\frac{p}{d}\right) c}{p} \; Llamamos \; \text{"p"} \; al \; m.c.m \; (b, d)$$

$$Para \; b \neq 0 \; y \; d \neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{\left(\frac{6}{3}\right).4 + \left(\frac{6}{2}\right).5}{6} = \frac{2.4+3.5}{6} = \frac{23}{6} \approx 3,8\widehat{3}$

b. $\frac{7}{60} + \frac{2}{45} + \frac{1}{15} = \frac{\left(\frac{180}{60}\right).7 + \left(\frac{180}{45}\right).2 + \left(\frac{180}{15}\right).1}{180} = \frac{3.7+4.2+12}{180} = \frac{41}{180} \approx 0,22\widehat{7}$

c. $\frac{2}{60}-\frac{8}{45}+\frac{1}{15}-2=\frac{\left(\frac{180}{60}\right).2-\left(\frac{180}{45}\right).8+\left(\frac{180}{15}\right).1-\left(\frac{180}{1}\right).2}{180}=\frac{6-32+12-360}{180}=\frac{-374}{180}=\frac{-187}{90}\approx-2,077$

2. MULTIPLICACIÓN

La multiplicación de dos fracciones es igual a otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Es decir:

$$\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a.c}{b.d}\ Con\ b y\ d\neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $\frac{6}{5}.\frac{4}{3}=\frac{6.4}{5.3}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}=1,6$

b. $(-100).\frac{2}{400}.\frac{5}{3}=\frac{-1000}{1200}=\frac{-5}{6}\approx-0,8\widehat{3}$

3. DIVISIÓN

La división por un número racional se define como el producto por su inverso. Es decir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}\ Con\ b,c\ y\ d\neq 0$$

POR EJEMPLO

a. $4:\frac{2}{3}=4.\frac{3}{2}=\frac{4}{1}.\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$

b. $\frac{8}{5}:\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{8}{5}.\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{-56}{10}=-5,6$

c. $\frac{1}{5}:\left(\frac{-4}{25}\right)=\frac{1}{5}.\left(\frac{-25}{4}\right)=\frac{-25}{20}=\frac{-5}{4}=-1,25$

4. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN

Sean a, b, c números reales, entonces se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a.(b.c) = (a.b).c$
Distributiva	$a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$	
Identidad	$a + 0 = 0 + a = a$	$a.1 = 1.a = a$
Opuesto - Inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ Opuesto	$a.\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right).a = 1$ inverso

5. POTENCIACIÓN

Sean a un número real y n un número entero. Definimos la potencia enésima de a, como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,veces}$$

Teniendo en cuenta la definición, podemos decir:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1\ si\ a \neq 0$
- $0^n = 0\ si\ n > 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ si\ a \neq 0$

Regla de signos

- Si el exponente es par, el resultado siempre tiene signo positivo.
- Si el exponente es impar, el resultado mantiene el signo de la base.

POR EJEMPLO

$$(-2)^3 = -8 \qquad (-4)^2 = 16 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$$

6. PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Sean m y n enteros, las bases a y b reales y distintas de cero, en caso que el exponente sea cero o negativo:

Propiedad	Ejemplos
Producto de potencias de igual base: $a^m . a^n = a^{m+n}$	$(-2)^3 . (-2)^2 = (-2)^{3+2} = -32$
Cociente de potencias de igual base: $a^m : a^n = a^{m-n}$	$(-2)^5 . (-2)^{-2} = (-2)^{5-(-2)} = -128$
Potencia de otra potencia: $(a^m)^n = a^{m.n}$	$\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^3\right]^0 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{3.0} = 1$
Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación: $(a.b)^m = a^m . b^m$	$(2.3)^3 = 2^3 . 3^3 = 8.27 = 216$
Distributiva de la potencia respecto de la división: $(a:b)^m = a^m : b^m$	$(8:2)^3 = 8^3 . 2^3 = 512:8 = 64$

7. RADICACIÓN

Dado un número real a, el número real b es su raíz enésima si se verifica que la potencia enésima de b es a:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales opuestos

$$\sqrt{49} = \pm 7 \; pues \; (\pm 7)^2 = 49$$

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \; pues \; (\pm 3)^4 = 81$$

La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el radicando

$$\sqrt[3]{64} = 4 \; pues \; 4^3 = 64$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \; pues \; (-2)^5 = -32$$

La raíz de índice par de un número real negativo no es un número real, pues todo número real elevado a una potencia par es positivo.

8. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Propiedad	Ejemplos
Distributiva de la raíz respecto de la multiplicación: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = 2.4 = 8$
Distributiva de la raíz respecto de la división: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} \; con \; b \neq 0}$	$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
Raíz de otra raíz: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2.3]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$

Radicando elevado a una potencia: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = (\sqrt[n]{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{m}}$	$\sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$ Se obtiene lo mismo haciendo $\sqrt{4^5} = (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32$

9. POTENCIAS CON EXPONENTE FRACCIONARIO

Toda raíz se puede escribir como potencia de índice fraccionario:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

De manera análoga:

$$a^{-\frac{n}{p}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}} \; donde\ p\ es\ entero > 1$$

10. OPERACIONES COMBINADAS

Las sumas y las restas que no se encuentran dentro de un paréntesis o dentro de una raíz son operaciones que separan en términos. En cada término resolvemos primero las operaciones que encierran los paréntesis.

Cuando hay llaves que encierran corchetes y estos encierran paréntesis, se resuelven:

1° Las operaciones entre paréntesis

2° Las operaciones entre corchetes

3° Las operaciones entre llaves

Las operaciones bajo el símbolo radical se tratan como si estuvieran entre paréntesis.

POR EJEMPLO

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}:\left(2+\frac{1}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 + (-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}:\left(\frac{9}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{27}{8}+(-1)\left\{2-\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}\right]\right\}=$$

$$\frac{27}{8}+(-1)\left\{2-\frac{2}{3}\right\}=$$

$$\frac{27}{8}+(-1)\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{27}{8}-\frac{4}{3}=\frac{49}{24}$$

- ✓ El siguiente video te permitirá comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=UbqjPCAjUfg

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 3

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Operaciones con números reales

DURACIÓN: 4 horas

1. Con los números 20; 3; -20; -5:

   a. Combinalos para formar todas las fracciones posibles y ordenalos de menor a mayor.

   b. Completá el cuadro.

Cociente mayor a uno	Cociente menor a uno

2. Calculá el m.c.m y M.C.D para los números que se indican.

   a. 32; 186

   b. 36; 180

3. Las alarmas de tres relojes suenan cada 4 minutos, 10 minutos y 15 minutos, respectivamente. Si acaban de coincidir las tres alarmas dando la señal. ¿Cuánto tiempo pasará para que vuelvan a coincidir?

4. Resolvé los siguientes ejercicios combinados.

   a. $\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right)=$

   b. $\frac{11}{15}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1=$

   c. $\frac{49}{5}:7+\left(3-\frac{11}{7}\right):\left(\frac{14}{49}+\frac{3}{7}:\frac{7}{12}\right)=$

   d. $-\frac{3}{4}\left[\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=$

5. Resolvé aplicando propiedades de potenciación.

a. $(2^3.2^4):2^2 =$

b. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 : 3^{-1} =$

c. $(4^3.4^{-1})^4 : (4^4.4^{-2}) =$

6. Resolvé aplicando propiedades de radicación y cuando sea necesario, expresé como exponente fraccionario.

a. $\sqrt[6]{\left(-1+\frac{5}{4}\right)^3} : \sqrt[4]{1-\frac{65}{81}} =$

b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}.\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}.\left(\sqrt[8]{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

c. $(1-0,75)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

7. Expresá en forma de potencia, efectuá las operaciones y simplificá.

a. $\sqrt[8]{x^4}.\sqrt[4]{x^2} =$

b. $\sqrt[9]{a^3}.\sqrt[3]{a^2} =$

c. $\sqrt[3]{x^5}:\sqrt{x^4} =$

8. Marcá con una cruz en la columna del verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso, justificá la respuesta.

	Verdadero	Falso	Respuesta correcta
$(3^{1/2})^0 = 0$			
$(3^{-2}-2^{-3})^{-1} = 72$			
$2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$			
$(7^{1/2})^6 = 7^3$			

$\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\sqrt{81}} = 348$			

9. Resolvé utilizando calculadora:

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \frac{2^{3}}{3^{2}}} =$

b. $\left[\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^{4} . \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 1}{1 - \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}}\right]^{-1/3} =$

c. $\dfrac{\frac{11}{49} - \frac{3}{7}}{\frac{11}{49} + \frac{3}{7}} =$

d. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}} =$

e. $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^{-2} =$

f. $\sqrt[6]{\left(-1 + \frac{5}{4}\right)^{3}} : \sqrt[4]{1 - \frac{65}{81}} =$

GUÍA DE TRABAJO N° 4

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Razones y proporciones

La **razón** es el cociente de dos números. El primer número se llama antecedente; y el segundo, consecuente.

La razón la podemos representar como **a/b** siendo a el antecedente y b el consecuente; se lee **antecedente** es a **consecuente**.

POR EJEMPLO

La razón de 6 y 3 es 2 (6/3=2). Se lee 6 es a 3.

La **proporción** refiere a dos magnitudes que son proporcionales o guardan proporcionalidad cuando el crecimiento de una afecta al crecimiento de la otra. Si la relación es positiva crece una y crece otra o decrece una y decrece la otra, en este caso hablamos de proporcionalidad directa (espacio y tiempo, compra y gasto, etc.). En caso contrario, estamos ante la proporcionalidad inversa, en la cual el crecimiento de una magnitud implica el decrecimiento de la otra (trabajadores y tiempo que tardan en hacer una tarea).

Una proporción es una igualdad entre dos razones

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}\ donde\ a, d \rightarrow extremos \quad b, c \rightarrow medios \quad con\ b\ y\ d \neq 0$$

Las proporciones tienen 4 términos: el primero (numerador de la primera fracción) y el cuarto (denominador de la segunda) se llaman **extremos**; y el segundo (denominador de la primera fracción) y el tercero (numerador de la segunda) se llaman **medios.**

1. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \Rightarrow \boldsymbol{a.d = b.c}$$

POR EJEMPLO

Si queremos determinar el valor de x que satisface

$$\frac{x}{18} = \frac{9}{54}$$

Ocupemos la propiedad fundamental:

$x.54 = 9.18$; despejamos x → $x = \frac{9.18}{54} = 3$

2. APLICACIONES DE LAS PROPORCIONES

Las proporciones tienen múltiples usos y aplicaciones. Las más importantes son la regla de tres simple o compuesta y los porcentajes.

> La **regla de tres simple** es una proporción o una igualdad de dos razones, es una operación por medio de la cual se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres. Esta regla puede ser directa o inversa, según cómo sea la relación de proporcionalidad entre las magnitudes que la conforman. Si es directa, se resuelve como una proporción normal.

POR EJEMPLO

a. Un ciclista recorre 150 km en 5 horas. ¿Cuántos km recorrerá en 7 horas?

Horas y kilómetros son magnitudes directamente proporcionales.

Disposición de los datos

150 km	5 horas
X	7 horas

Tenemos la proporción $\frac{150}{x} = \frac{5}{7}$ despejamos: **x = 210 km**. Si es inversa, se intercambia un medio con un extremo y se procede como en cualquier proporción.

b. Si 12 obreros se tardan 30 días en acabar una obra. ¿Cuántos obreros se necesitarán para acabar la misma obra en 24 días?

Disposición de los datos

12 obreros	30 días
X	24 días

Obreros y días son magnitudes inversamente proporcionales. Tenemos la siguiente proporción:

$\frac{12}{x} = \frac{24}{30}$ Se ha invertido una de las razones, despejamos **x = 15 obreros**.

Para calcular un **porcentaje** o tanto por ciento (%) debemos hacer una regla de tres simple directa. De las cuatro cantidades que la forman, siempre conocemos tres: la cantidad que queremos transformar en tanto por ciento, el total con el que se compara y el total con el que se compara el tanto por ciento (100).

POR EJEMPLO

Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $120.000, nos hacen un descuento del 7,5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

La proporción la podemos plantear $\frac{\mathbf{120.000}}{\mathbf{100}} = \frac{x}{7{,}5}$ o como regla de tres simple:

100% → 120.000
7,5% → x
Resolvemos: $x = \frac{\mathbf{7{,}5.120.000}}{\mathbf{100}} = \mathbf{9000}$ el descuento es de $9000
Se debe pagar $111.000

Para obtener directamente este valor, lo podemos plantear teniendo en cuenta que debemos pagar.
100%- 7,5% = 92,5% del valor del vehículo

100% → 120.000
92,5% → x
Resolvemos: $x = \frac{\mathbf{92{,}5.120.000}}{\mathbf{100}} = \mathbf{111.000}$

Se debe pagar $111.000

✓ El siguiente video te permitirá comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=gQOddfOtoN0

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 4

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Razones y proporciones

DURACIÓN: 3 horas

Leé los siguientes problemas y resolvé. Recordá anotar todos los datos, los procedimientos y los resultados.

1. Un terreno se remata dividido en 36 lotes iguales. Se presentaron sólo tres interesados: el primero adquirió un cuarto del terreno total; el segundo un tercio y el tercero dos novenos. ¿Cuántos lotes adquirió cada uno? ¿Cuántos lotes quedaron sin vender?

2. De un stock de 1200 artículos, se han vendido 735. ¿Qué porcentaje de artículos quedo sin vender?

3. Se han pagado $ 1.260 por una entrada para un partido adquirida en la reventa. Si el revendedor ganó el 180% de su valor original ¿Cuánto costaba la entrada en ventanilla?

4. Un tanque destinado para riego, contenía en enero 500.000 metros cúbicos de agua y estaba lleno. En abril la reserva se redujo en un 20% de su capacidad y en el mes de agosto un 30% de lo que quedaba. ¿Cuántos litros tenía el tanque en abril, y cuántos quedaron en agosto?

5. Una moto cuyo precio era der $15.000, cuesta en la actualidad 250 más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

6. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de $120.000, nos hacen un descuento del 7,5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

7. Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de $3.600. ¿Cuál era el precio inicial?

8. Después de rebajar el precio de una computadora un 8%, me ha costado $2.596. ¿Cuál era su precio inicial?

9. Un juguete vale en una juguetería 140 pesos. Si durante la semana previa al Día del niño el juguete sube 22% y una vez que éste ha pasado, baja un 9%. Calculá su precio final.

10. Si compro un celular de $4.200 y me lo rebajan un 20% por pago contado. Pero después me cobran el 21% de I.V.A. ¿Cuánto me costó?

GUÍA DE TRABAJO N° 5

ECUACIONES E INECUACIONES

Ecuaciones

"De la época babilónica existe más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas. Abarcan un período que va desde el año 2100 a.C., época del famoso Rey Nabucodonosor. De esas tablillas, unas 300 se relacionan con matemáticas, unas 200 con tablas de varios tipos: de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc. Los problemas que se plantean tratan acerca de cuentas diarias, contratos, préstamos, interés simple y compuesto. En Geometría tenían conocimiento del Teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes; en Álgebra hay problemas de segundo e incluso de tercero y cuarto grado; también resolvían sistemas de ecuaciones: existe un ejemplo de un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas."

Texto extraído de: Historia e historias de Matemáticas- Mariano Perero- Grupo Editorial Iberoamérica.

En 1545 el matemático italiano Gerolamo Cardano publicó una solución algebraica para las ecuaciones de tercer grado en función de sus coeficientes y NiccoloTartaglia la desarrolló. Poco después, Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, encontró una solución para las ecuaciones de cuarto grado. En 1635 el matemático y filósofo francés René Descartes publicó un libro sobre la teoría de las ecuaciones, incluyendo su regla de los signos para saber el número de raíces positivas y negativas de una ecuación. En 1750 el matemático suizo Gabriel Cramer encontró una regla para la resolución de sistemas usando determinantes.

Contemporáneo a Cramer, el matemático francés Juan Le Rond D'Alembert, demostró que una ecuación de grado n tiene n raíces

1. ECUACIONES

> Una ecuación es una igualdad entre expresiones que contienen uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas que se son representados por medio de letras.

Nota: las incógnitas se representan en general por las últimas letras del alfabeto, las llamaremos x, y, z.

POR EJEMPLO

a) $\mathbf{3y^2 - \sqrt{2} = -\frac{y^2+1}{y}}$

b) $\mathbf{3x + 2xy - 4 = 8}$

c) $\mathbf{3x^3 - 2x = \sqrt{x}}$

d) $\mathbf{4x + 1 - 4x = 4}$

Observemos en este ejemplo las partes de una ecuación:

$$\overbrace{5x - 10}^{Primer\ miembro} = \overbrace{x + 6}^{Segundo\ miembro}$$

Términos algebraicos
o términos en “x”

Si bien existen diversos tipos de ecuaciones, como lo son las algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, particularmente nos abocaremos a las ecuaciones algebraicas en una incógnita.

2. ECUACIONES ALGEBRAICAS CON UNA INCÓGNITA

> Las ecuaciones algebraicas, son las que resultan de efectuar a las incógnitas operaciones como: adición, sustracción, potenciación y radicación.

POR EJEMPLO

a) $3y^2 - \sqrt{2} = -\frac{y^2+1}{y}$

b) $3x^3 - 2x = \mathbf{6}$

c) $\sqrt{x} - \frac{3}{2} = 3x$

Clasificación de ecuaciones algebraicas con una incógnita.

ECUACIONES ALGEBRAICAS EN UNA VARIABLE O INCÓGNITA

- **Racionales**
  - Enteras o polinómicas. Los exponentes de la variable o incógnita son números naturales.
    - $x^2 - 2x = -1$
  - Fraccionarias. Al menos uno de los exponentes de la variable o incógnita es un número entero negativo.
    - $\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x} = 2x^2$
- **Irracionales**
  - Al menos una de las incógnitas figura bajo el signo radical o presenta exponente fraccionario.
    - $\sqrt{2x} - 3 = \frac{1}{4} + x$

3. ECUACIONES POLINÓMICAS

Si igualamos a cero un polinomio P(x), la expresión P (x) = 0 se llama ecuación asociada al polinomio. Resolver una ecuación P(x) = 0 es hallar un conjunto de números reales (o complejos) que satisfacen esta igualdad.

Dicho conjunto se llama conjunto solución de la ecuación dada, y sus elementos se llaman raíces de la ecuación. En símbolos:

$$\boldsymbol{a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

Como trabajamos solo con números reales, el conjunto solución S, lo indicamos:

$$\boldsymbol{S = \{a \in IR / P(a) = 0\}}$$

Las ecuaciones siempre se pueden igualar a cero, sus soluciones son los ceros o raíces de P(x) y, según el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las no reales. Cuando la solución nos dé un complejo, diremos que **no tiene solución en el conjunto de los números reales.**

POR EJEMPLO

$3x^3 - 2x = 6$ Que también puede ser escrita $3x^3 - 2x - 6 = 0$, correspondiendo a una ecuación de tercer grado en x, que presenta a lo sumo tres raíces reales.

$3(t+1) - (t^2+1) = 2t$ Cuya expresión equivalente, luego de operar es la siguiente ecuación de segundo grado en t, $-t^2 + t + 2 = 0$ que admite a los sumo dos raíces reales.

Cuando la solución no es inmediata recurrimos a la factorización y a las propiedades de las operaciones con números reales para encontrar las incógnitas.

4. ECUACIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

> Las ecuaciones polinómicas de primer grado (o lineales) con una incógnita tienen la forma:
>
> **a x + b = 0**, siendo a y b números reales con a ≠ 0

$$\overbrace{ax + b}^{Primer\ miembro} \quad = \quad \overbrace{0}^{Segundo\ miembro}$$

ax es el término lineal

b es el término independiente

Resolución de ecuaciones

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como las operaciones con expresiones algebraicas.

Sea la ecuación $3.(x+2) - x = 0$

Aplicando distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

$$3.x + 6 - x = 0$$

Utilizando conmutativa de la adición.

$$3.x - x + 6 = 0$$

Operando con los términos semejantes en x, se llega a la expresión general de la ecuación de primer grado.

$$2x + 6 = 0$$

Utilizando la ley uniforme, la del inverso aditivo y la del elemento neutro para que quede en el primer miembro solamente el término en x, resulta:

$$2x + 6 + (-6) = 0 + (-6)$$

$$2x + 0 = -6$$

Aplicando la ley uniforme, la del inverso multiplicativo y la del elemento neutro de la multiplicación queda:

$$\frac{1}{2}2x = -6.\frac{1}{2}$$

$$1.x = -3$$

La solución de la ecuación es

$$x = -3$$

Para verificar la solución de la ecuación:

- Se reemplaza el valor hallado para x, en la ecuación original.
- Se resuelve cada miembro.
- Si el valor es solución de la ecuación, se debe llegar a una identidad.

Particularmente para el ejemplo anterior resulta si x= -3 → 3.(-1) + 3 = -3 + 3 = 0

Al llegar a una identidad, se concluye que x =-3 es solución y el conjunto solución de la ecuación es S= {-3}

Una ecuación lineal puede tener una, infinitas o ninguna solución.

En el siguiente cuadro vemos las condiciones para cada tipo de solución:

$a \neq 0$ y $b \neq 0$

$x = \frac{b}{a}$

Presenta una única solución que la satisface.

Ecuación determinada

$a = 0$ y $b = 0$

$0 \cdot x = 0$

Tiene infinitas soluciones porque para cualquier número real x se obtiene $0 = 0$ que es una identidad.

Ecuación indeterminada

$a = 0$ y $b \neq 0$

$0 \cdot x = b$

Esta ecuación no tiene solución porque la igualdad obtenida NO se cumple para ningún número real x; ya que para cualquier valor de x se obtendría $0 = b$ lo cual es un *absurdo*.

Ecuación sin solución

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a)

$$2x + 3 = 5$$

$$2x + 3 - 3 = 5 - 3$$

$$2x = 2$$

$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}2$$

$$x = 1$$

Una vez resuelta la ecuación, verifique que el valor obtenido es solución de ella.

La ecuación 2x+3=5 tiene **solución única x=1**

b)

$$3x - x = 2x$$

$$2x = 2x$$

$$2x - 2x = 0$$

$$0x = 0$$

En este ejemplo observamos que hemos obtenido: 0.x=0

Si se reemplaza x por cualquier número real, se obtiene una identidad, o sea que la ecuación tiene **infinitas soluciones** (todos los reales son solución de ella)

c)

$$x + 5 = x$$

$$x + 5 - 5 = x - 5$$

$$x = x - 5$$

$$x - x = -5$$

$$0x = -5$$

Se obtiene: 0x=-5

¿Cuántas soluciones tiene esta igualdad?

Cualquiera sea el valor que tome x el producto es nulo y distinto de -5

No tiene solución.

d)

$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$

$$3.(x + 1) = 5.(3x - 9)$$

$$3x + 3 = 15x - 45$$

$$3 + 45 = 15x - 3x$$

$$48 = 12x$$

$$x = 4$$

La solución es x=4, que pertenece al conjunto de los números reales; por lo tanto esta ecuación tiene solución en R.

Solución única x = 4

5. APLICACIONES DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Cuando el planteo de un problema se puede “traducir” a una ecuación, para resolverlo tiene que considerar los siguientes pasos:

1. Leer e interpretar el enunciado, para poder identificar datos e incógnita determinando las relaciones que existen entre ellos.

2. Realizar un dibujo, cuando sea posible, en el que se señalan los datos e incógnitas.

3. Escribir la ecuación que corresponda a la relación encontrada entre los datos y la incógnita. Para ello es necesario identificar cuál es la incógnita o valor desconocido en el problema y asignarle una letra cualquiera.

4. Resolver la ecuación.

5. Verificar si la solución obtenida verifica la ecuación planteada y responder a las condiciones del problema.

6. Escribir la respuesta acorde al problema.

Lo ilustramos en ejemplos de situaciones que se puedan expresar, analizar y resolver mediante una ecuación.

POR EJEMPLO

a) En una fábrica de aceite, se quiere enviar éste en camiones cisterna a un almacén. Los encargados del almacén solicitan que los camiones lleguen exactamente a las 17 hs Si los camiones viajaran a 80 km/h, llegarían con una hora de adelanto (a las 16hs). Pero si viajaran a 60 km/h, llegarían con una hora de retraso (a las 18hs). ¿A qué distancia está la fábrica de aceite del almacén?

A partir de los pasos para resolver un problema:

Lee e interpreta el enunciado, para poder identificar datos e incógnita y determinar las relaciones que existen entre los mismos para escribirlas en lenguaje algebraico.

"Distancia" es igual al producto de "velocidad" y "tiempo" d = v . t

Como la distancia recorrida es la misma en ambos casos podemos deducir que:

$$v_1.(t-1) = v_2.(t+1)$$

Quedando planteada una ecuación donde "t" es nuestra incógnita.

$80.(t-1) = 60.(t+1)$ Al despejar t se tiene: t = 7

Para hallar respuesta al problema, reemplazamos t en cualquiera de las ecuaciones anteriores ya que d =v. t → d= 80km/h. 6 hs = 60km/h . 8 hs = 480 km

La respuesta al problema es que el almacén se encuentra a 480 km del molino.

b) A una cena de fin de año organizada por un club, asistieron 400 socios entre adultos y menores. Si el costo de la tarjeta de los adultos era de $ 35, y el de los menores $20, ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo, si en total el club recaudó $12.500?

Si se designa con x al número de socios adultos (una de las incógnitas del problema), entonces, el número de menores será: 400 – x.

Cada adulto pagó $35, es decir que el total pagado por ellos es: 35.x

Cada menor pagó $20, el total abonado por ellos fue: 20. (400 – x)

La expresión en relación a la recaudación: 35x + 20 (400 – x) =12500

Al resolver la ecuación tenemos que x = 300

Sólo resta verificar la solución e interpretarla en términos del problema:

35. 300 + 20. (400 -300)= 10500 + 2000 = 12500

Asistieron entonces 300 adultos y 400-300 = 100 menores.

c) Consideremos en el problema anterior que la recaudación del club fue de $10.995. En este caso ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo?

35x + 20 (400 – x) =12500

La ecuación que corresponde a este nuevo enunciado es:

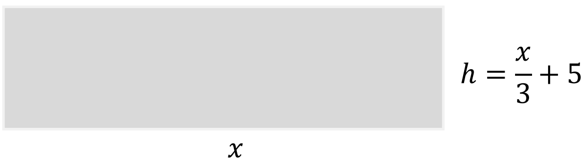
35x + 20 (400 – x) =10995 ➔ x = 199,6 Números de adultos

Con este valor, calculamos el número de menores que sería x =200, 3. Desde el punto de vista matemático la solución es correcta, pero carece de sentido cuando se piensa en el contexto del problema por tratarse de un número de personas.

Esto pone en evidencia dos cosas:

- La necesidad de verificar si los resultados obtenidos son correctos del el punto de vista matemático.
- Comprobar si la respuesta es razonable en términos del problema planteado.

d) En un rectángulo de 42cm de perímetro la altura es 5cm mayor que un tercio de la base. ¿Cuál es la longitud de la base?



Si decimos que x es la longitud de la base, entonces la expresión de la altura en relación a la medida de la base es: $h = \frac{x}{3} + 5$.

La ecuación que permite calcular la longitud de la base teniendo presente el perímetro de la figura es:

Cuya resolución es:

$$\underbrace{2x}_{base} + 2.\underbrace{\left(\frac{x}{3} + 5\right)}_{altura} = \underbrace{42}_{perímetro}$$

$$2x + \frac{2}{3}x + 10 = 42$$

$$\left(2x + \frac{2}{3}x\right) + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 - 10 = 42 - 10$$

$$\frac{3}{8}.\frac{8}{3}x = 32.\frac{3}{8}$$

$$x = 12$$

Se verifica la ecuación y analiza la coherencia del valor calculado con la situación:

$$2.12 + 2.\left(\frac{12}{3} + 5\right) = 24 + 2(4 + 5) = 24 + 18 = 42$$

La respuesta del problema es: **La longitud de la base es de 12 cm.**

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

w.youtube.com/watch?v=mf_5ExEvY0Y
https://www.youtube.com/watch?v=8Zb_rz4skfs
https://www.youtube.com/watch?v=vOr-S9R4O0Q

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 5

ECUACIONES E INECUACIONES

Ecuaciones

DURACIÓN: 4 horas

1. Expresé simbólicamente la ecuación correspondiente:
   a. Un número más su quinta parte es 12.

   b. Un poste tiene bajo tierra 2/7 de su longitud y la parte emergente mide 8 metros.

   c. El perímetro de un cuadrado es de 12m.

   d. En una biblioteca hay 23 libros distribuidos en dos estantes, en el abajo hay 7 libros menos que en el de arriba.

2. Resolvé las siguientes ecuaciones lineales.

   a. $2.(3\mathrm{x}-2)-(\mathrm{x}-3)=8$

   b. $\mathrm{x}-1-\frac{\mathrm{x}-2}{2}+\frac{\mathrm{x}-3}{3}=0$

   c. $\frac{3}{4}.(2\mathrm{x}+4)=\mathrm{x}+19$

   d. $-2.(\mathrm{x}+1)+3(\mathrm{x}-2)=\mathrm{x}+6$

   e. $\frac{5}{x+7}=\frac{3}{x-2}$

   f. $3.(\mathrm{x}-1)+4\mathrm{x}-3=4(\mathrm{x}+2)+1$

   g. $\frac{2\mathrm{x}-6}{5}+\frac{\mathrm{x}}{3}=(\mathrm{x}-1)$

h. $\frac{5-x}{4}+\frac{x+2}{3}=8x$

i. $\frac{1-x}{4}+\frac{5x+2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$

j. $\frac{1}{4}(3x-5)+\frac{1}{2}(4-2x)=\frac{1}{2}(x+3)$

3. Marcá la respuesta correcta.

a. La expresión: $\frac{13}{3}x-5(x+2)=\frac{4x}{3}-2(x+1)$ es verdad para:

$a. x=0$ $b. x=1$ $c. 2,2x$ $d. 22x$ $e. 220x$

b. El 20% de un número sumado con el doble se expresa:

$a. x$ $b. 2x$ $c. x=-1$ $d. ninguún\ número\ real$ $e. todo\ número\ real$

c. Una columna está enterrada las dos quintas partes de su longitud, las dos sétimas partes del resto está bajo agua y sobresale en 3m. ¿Cuál es la longitud de la columna?

$a. 6m$ $b. 7m$ $c. 9m$ $d. 9,5m$ $e. 10m$

4. Resolvé los siguientes problemas de aplicación:

a. Un comerciante hace un testamento de la siguiente forma: dos tercios a su único hijo; un quinto, a una familia muy amiga, y los 49000 restantes, a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende el total de la herencia?

b. En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si el total es de 156 personas.

c. Durante su primera hora de trabajo, el dueño de un puesto de revistas vendió la cuarta parte de los diarios que tenía y, durante la segunda hora, vendió la sexta parte de los que le quedaban. Contó los ejemplares y notó que aún había 25. ¿Cuántos diarios tenía al principio?

GUÍA DE TRABAJO N° 6

ECUACIONES E INECUACIONES

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado (o cuadráticas) con una incógnita tienen la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales con a≠0.

$$\overbrace{ax^2 + bx + c}^{Primer\ miembro} = \overbrace{0}^{Segundo\ miembro}$$

$\boldsymbol{ax^2}$es el término cuadrático, y **a** su coeficiente.

$\boldsymbol{bx}$ es el término lineal, y **b** su coeficiente.

$\boldsymbol{c}$ es el término independiente.

Para resolver una ecuación cuadrática con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como factorización.

Observación: dado que toda ecuación de este tipo se puede igualar a cero, hallar la solución de una de ellas es lo mismo que hallar las raíces de un polinomio de segundo grado.

POR EJEMPLO

Son ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 16 = 0$

b) $3x^2 - 48 = 0$

c) $x^2 - 7x = 18$

d) $9x^2 - 6x = -1$

Surge entonces la pregunta: ¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado?

1. RESOLUCIÓN

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ (o raíces de un polinomio de segundo grado) pueden obtenerse a partir de los coeficientes a, b, c con la siguiente expresión:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Importante: si uno de los términos no aparece en la ecuación es porque su coeficiente es nulo, en ese caso conviene completar la ecuación para aplicar la fórmula.

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Con esto se tiene $x_1 = 3 \text{ y } x_2 = 2$

En este caso las dos soluciones son números reales distintos.

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = -\frac{1}{3}$$

Es decir que: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$

Aquí se ve que algunas ecuaciones tienen como soluciones números reales iguales, se dice entonces que es una raíz doble.

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

Obteniendo: $x_1 = 1 + 2i \text{ y } x_2 = 1 - 2i$

En este caso vemos que las soluciones son número complejos conjugados.

La ecuación del ejemplo c) NO TIENE SOLUCIÓN en el conjunto de los números reales.

Para determinar el tipo de solución, también llamado naturaleza de las raíces, basta con analizar el radicando de la fórmula de resolución. Éste recibe el nombre de **discriminante**, y se nombra con la letra griega delta Δ :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales coincidentes.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

Podemos inferir un concepto muy importante: de acuerdo al signo del discriminante, es el tipo de soluciones que presenta una ecuación cuadrática.

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

Ecuaciones polinómicas de segundo orden
https://www.youtube.com/watch?v=o31bHVlCIi8&list=PLWRbPOo5oaTfAuNIYTSrQNgcqa9lsuCFs&index=3

Problemas con ecuaciones de segundo grado
https://www.youtube.com/watch?v=lDYd8CrXPEo&list=PLWRbPOo5oaTfAuNIYTSrQNgcqa9lsuCFs&index=4

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 6

ECUACIONES E INECUACIONES

Ecuaciones polinómicas de segundo grado

DURACIÓN: 3 horas

1. Resolvé las siguientes ecuaciones.

a. $4x^2 - 9 = 0$

b. $8x^2 + 16x = 0$

c. $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

d. $(x+1)^2 = 9$

e. $4x^2 - 16 = 0$

f. $-x^2 - 3x + 4 = 0$

2. Resolvé las siguientes ecuaciones y clasificá sus raíces.

a. $2x^2 - 8x - 10 = 0$

b. $x^2 + 4x + 4 = 0$

c. $x^2 - 4x + 5 = 0$

d. $x^2 - 4x - 5 = 0$

e. $x^2 - 2x + 1 = 0$

f. $2x^2 + 6x = 0$

3. Resolvé los siguientes problemas de aplicación:

a. Calculá las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.

b. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números pares consecutivos. Hallá los valores de dichos lados.

c. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, cuya área es de 4800 m^2 sabiendo que su largo es el triple de su ancho?

i. Realizá un esquema interpretativo.

ii. Determiná el área del terreno en función del ancho a.

iii. Calculá las dimensiones.

GUÍA DE TRABAJO N° 7

ECUACIONES E INECUACIONES

Inecuaciones lineales

Veamos los siguientes ejemplos:

> a) Importante empresa metalúrgica seleccionará ingeniero mecánico o electromecánico: Disponibilidad horaria. Edad: 25 a 35 años.
>
> b) El número de personas presentes sobrepasa los 1000.

¿De qué manera expresar los enunciados anteriores en forma algebraica?

En estos casos, las expresiones no pueden ser traducidas al lenguaje algebraico a través de una igualdad, sino que dan lugar a una **desigualdad**.

Estas expresiones algebraicas, se llaman **inecuaciones**.

Para los ejemplos anteriores tenemos:

a) Si designamos con la letra " e" a la edad, en lenguaje algebraico: $\mathbf{25 \leq e \leq 30}$

b) Si designamos con "n" al número de personas, en lenguaje algebraico: $\mathbf{n \geq 1000}$

> Una inecuación lineal es una desigualdad que se puede escribir:
>
> $$ax + b < c \qquad ax + b \leq c \qquad ax + b > c \qquad ax + b \geq c$$
>
> donde a, b y c son números reales con a≠0.

$$\overbrace{ax + b}^{Primer\ miembro} \quad < \quad \overbrace{c}^{Segundo\ miembro}$$

Al igual que para una ecuación, resolver una inecuación también es hallar los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Este conjunto de valores que la verifican se llama **conjunto solución**.

1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

A) Si en ambos miembros de una desigualdad sumamos o restamos un mismo número, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.
En símbolos:

$$\boldsymbol{a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c}$$

POR EJEMPLO

$$3 < 8 \Rightarrow 3 + 2 < 8 + 2 \Rightarrow 5 < 10$$

B) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número positivo, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.
En símbolos:

$$\boldsymbol{a < b \Rightarrow a.c < b.c \; si \; c > 0}$$
$$\boldsymbol{a < b \Rightarrow a: c < b: c \; si \; c > 0}$$

POR EJEMPLO

$$11 > 9 \Rightarrow 11.4 > 9.4 \Rightarrow 44 > 36$$

C) Si en ambos miembros de una igualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número negativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido.
En símbolos:

$$\boldsymbol{a < b \Rightarrow a.c > b.c \; si \; c < 0}$$
$$\boldsymbol{a < b \Rightarrow a: c > b: c \; si \; c < 0}$$

POR EJEMPLO

$$4 < 12 \Rightarrow \frac{4}{-2} > \frac{12}{-2} \Rightarrow -2 > -6$$

Si multiplicamos miembro a miembro por (-1), cambia el sentido de la desigualdad y nos queda:
2<6

Estas propiedades también se extienden a las relaciones ≥ o ≤

Veremos ahora como se aplica estas propiedades para resolver una inecuación.

2. RESOLUCIÓN Y REPRESENTACIÓN DEL CONJUNTO SOLUCIÓN

POR EJEMPLO

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3 > 0$. Trabajamos como si se tratara de una igualdad y despejamos x.

$2x > 3 \Longrightarrow x > \frac{3}{2}$ Hemos obtenido el conjunto solución:

$$S = \left\{x : x \in IR, x > \frac{3}{2}\right\}$$

Gráficamente:

Otra forma de expresar el conjunto solución es usando la notación de intervalo:

$$S = \left]\frac{3}{2}; \infty\right[$$

b) $-2x + 5 \geq 6$

$$-2x \geq 6 - 5$$

$-x \geq \frac{1}{2}$ multiplicamos ambos miembros por (-1) $\Longrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

Gráficamente:

Como intervalo: $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

POR EJEMPLO

Una furgoneta pesa 875 kg. La capacidad máxima de carga, teniendo en cuenta su peso no puede superar 1.315 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

Primero traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta	+	peso de 4 cajones	menor o igual que 1315 kg

$$875 + 4x \leq 1315$$

Al resolver la inecuación se obtiene la inecuación: $x \leq 110$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 110 kg. Además, como se trata de un peso, x>0.

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo]0; 110].

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=5z9V-cDV9mI

https://www.youtube.com/watch?v=y9vDsarVxtg

https://www.youtube.com/watch?v=7WOdmpUw3Wk&list=PLWRbPOo5oaTfAuNIYTSrQNgcqa9lsuCFs&index=9

https://www.youtube.com/watch?v=CkVXbU-PNRs
(EJEMPLOS)

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 7

ECUACIONES E INECUACIONES

Inecuaciones lineales

DURACIÓN: 4 horas

1. Resolvé las siguientes inecuaciones, representá el conjunto solución en la recta real y expresá como intervalo:
   a. $2x - 3 < 4 - 2x$

   b. $5 + 3x \leq 4 - x$

   c. $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$

   d. $x + 8 \leq 3x + 1$

   e. $2.(5 - x) < \frac{x+1}{3}$

   f. $7 - (2x - 5) \geq 4 - x$

   g. $-6.(3 - 2x) + 5.(x + 4) \leq 3x$

   h. $x + 2(x + 1) \leq 5(x + 4)$

   i. $x - 5 + 2(1 - x) > 3 + x$

   j. $3x - 2(5x + 4) < 6x + 5$

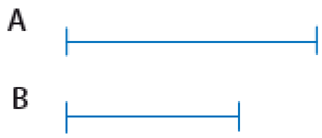
2. Resolvé los siguientes problemas de aplicación

a. Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7 cm ¿Qué se puede decir de su perímetro p?

b. Dados los siguientes segmentos A y B, cuyas longitudes son:

Long A= 2x-1

Long B= x+1



Comparando ambas longitudes ¿Qué valores puede tomar x?

GUÍA DE TRABAJO N° 8

FUNCIONES

Interpretación de gráficos

Las *funciones* son un concepto importante de la matemática actual ya que es una herramienta necesaria para *describir, analizar, sacar conclusiones e interpretar diversas situaciones de otras ciencias o de la matemática misma a través de gráficos, tablas y fórmulas.*

Son ejemplos de ellas:

- La presión atmosférica depende de la altura a la que sea medida, dado que a cada altura le corresponde un valor de presión atmosférica.

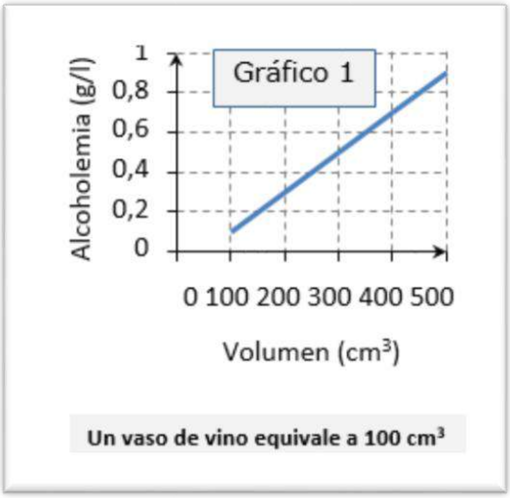
- Se hace un descuento del 15% del valor de la compra, esto es a cada importe total le corresponde un importe de descuento.

Daremos un ejemplo de función para poder interpretar, su definición formal.

POR EJEMPLO

Sabiendo que una de las principales causas de los accidentes de tránsito se debe al excesivo consumo de alcohol, ya que produce disminución de los reflejos, falsa apreciación de las distancias, subestimación de la velocidad y reducción de la percepción del riesgo; la función f representada en el gráfico 1, muestra la alcoholemia que alcanza un hombre de 60 kg, en función del volumen de vino ingerido. En el gráfico 2 la función f representa la alcoholemia que alcanza una persona en función del tiempo, a partir de la ingesta de ¾ litro de vino.
Teniendo en cuenta la ley que establece el límite de alcoholemia (cantidad de alcohol por litro de sangre) es de 0,5g por litro de sangre en conductores de autos, 0,2g/l para motociclistas y 0g/l para conductores de vehículos de pasajeros.

Observando cada gráfica, podremos responder:



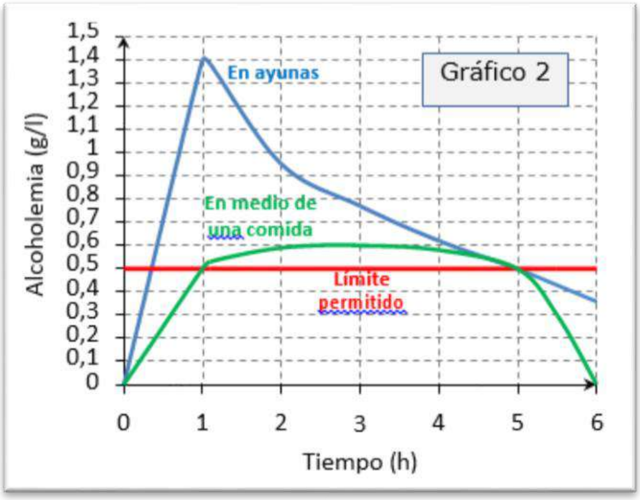
a) ¿Qué alcoholemia alcanza si bebe dos vasos de vino?
Si bebe 2 vasos de vino, alcanza 0,3 g/l.

b) ¿Qué cantidad de vino ingirió si alcanza una alcoholemia de 0,7 g/l?
Ingirió 400 cm^3, es decir 4 vasos de vino.

c) ¿Qué volumen como máximo puede beber un conductor de auto que pesa 60 kg?
Como máximo puede beber 3 vasos de vino, que equivale a 300 cm^3.

d) ¿En qué momento se alcanza la mayor alcoholemia?
La mayor alcoholemia se alcanza al cabo de 1 hora.

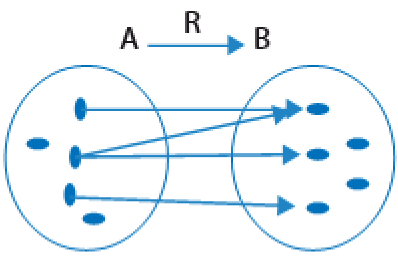
e) ¿Cuántas horas transcurren a partir de la ingesta de alcohol en medio de las comidas, hasta alcanzar el límite permitido para conducir?
Tiene que transcurrir 5 horas a partir de la ingesta, para poder volver a conducir.



1. RELACIÓN

Dados dos conjuntos A y B, se llama relación binaria R de A en B, a una ley que hace corresponder a elementos de A, elementos de B.

Se muestra la relación en un diagrama de Venn y expresada por comprensión.



$$R = \left\{ {}^{(a,b)}\!\big/_{(a,b)} \in AxB, aRb \right\}$$

Cuando se formula una expresión que liga dos o más objetos entre sí, postulamos una relación (no necesariamente matemática) Por ejemplo: **Juan es padre de Laura. (Juan, Laura).**

- **Dominio:** es el conjunto formado por los primeros elementos del par ordenado o cupla.

- **Imagen:** es el conjunto formado por los segundos elementos del par ordenado o cupla.

2. FUNCIÓN

Dado un conjunto A y un conjunto B, una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de **existencia** y **unicidad**.

La definición puede sintetizarse diciendo que **para todo elemento de A existe un único elemento de B** con el cual se relaciona.

EXISTENCIA → Todos los elementos de A tienen su correspondiente elemento en B

UNICIDAD → A cada elemento de A le corresponde un único elemento B

Es importante cuando nombramos funciones decir en qué conjuntos está definida ya que por ejemplo una relación en la que para todo valor de “x”, “y” se calcula según:

$$\mathbf{y = x : 3}$$

Definida de Z en Z, **no es función**, no cumple con la condición de existencia, porejemplo para el entero 2 no existe ningún entero con el cual se relacione a través de la fórmula dada.

En cambio sí está definida de IR en IR, **sí es función**, ya que para todo real existe otro único real que se obtiene dividiendo por 3.
En general el esquema que se utiliza para funciones numéricas es el siguiente:

Esquema funcional

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

El conjunto de partida A es el dominio de la función, lo representamos con la letra D, el conjunto de llegada lo tomaremos como el conjunto de los números reales IR. En base a esto, el esquema funcional lo escribimos como:

Esquema funcional

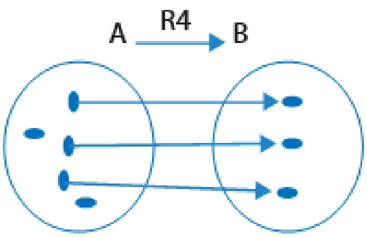
$f: D \rightarrow IR$

$x \rightarrow y = f(x)$

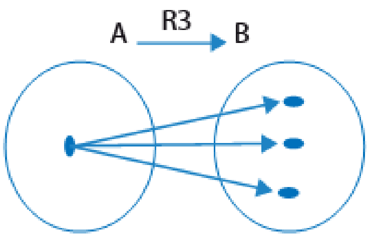
Llamamos **x (variable independiente)** a los elementos del conjunto A, e **y (variable dependiente)** a los elementos del conjunto B.

En el ejemplo "Juan es padre de Laura" tenemos una relación que no es función, porque Juan puede tener otros hijos, con lo que le corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada y no cumple la condición de unicidad. Si la relación la plantemos "Su padre es" sería función, porque a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un y solo un elemento en el conjunto de llegada.

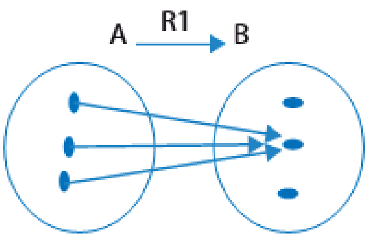
Consideremos las 4 relaciones dadas en las figuras, veremos cuáles de ellas corresponden a funciones.



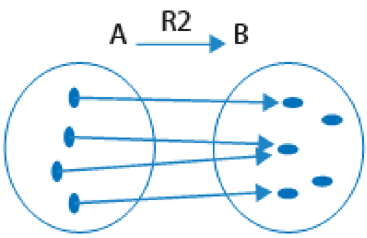
Relación: no es función porque no cumple con la condición de existencia



Relación: no es función porque no cumple con la condición de unicidad



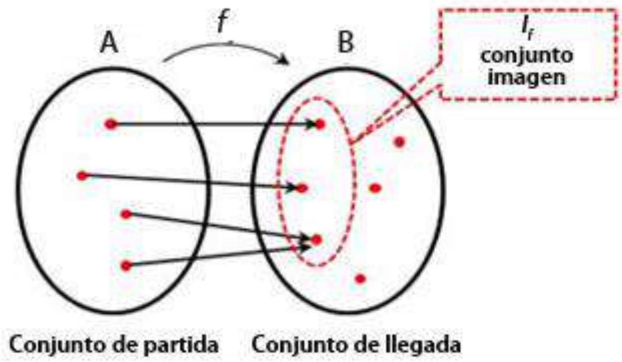
La relación es FUNCIÓN



La relación es FUNCIÓN

3. DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

El dominio de la función es el conjunto al que pertenecen los elementos para los cuales la función está definida, es decir, es el conjunto de elementos que tienen imagen.
El conjunto imagen es el conjunto al que pertenecen todas las imágenes de los elementos del dominio.



El conjunto de partida A, lo llamamos **dominio de la función**, y al conjunto de elementos al que llegan las flechas, que está incluido en el conjunto de llegada B, señalado con I_f , lo llamamos **conjunto imagen**.

Se llama **dominio (Dom (f))** al conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.

El dominio coincide con el conjunto de partida D ≡ A

Se llama **imagen (Im(f))** al conjunto de valores de y que están asociados a cada elemento x

El conjunto imagen está incluido en el conjunto de llegada $I \subset B$

POR EJEMPLO

a) $f: IR \to IR$ dada por $f(x) = x^2$, el conjunto dominio es $Dom(f) = IR$ y el conjunto imagen es $Im(f) = IR_0^+$

b) $f: D \to IR$ dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$, para determinar el dominio, tenemos en cuenta que el radicando debe ser positivo, de lo contrario el resultado no es un número real, por lo tanto el conjunto dominio está formado por todos los valores x que cumplen la condición x > 1 $Dom(f) = [1;\ \infty[$. Si consideramos x =1 vemos que el valor más chico que toma la función es cero.
El conjunto imagen es: $Im(f) = [0;\ \infty[$. El domino es un subconjunto de IR.

4. RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Se llaman raíces de una función a los valores de la variable independiente que pertenecen al dominio y su imagen es cero, es decir los valores de x que hacen f (x) = 0.

Gráficamente las raíces son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje de abscisas o eje x.

POR EJEMPLO

$$f\colon IR \to IR \; tal\ que\ x^2 - 1$$

Para determina las raíces de f planteamos la ecuación correspondiente: f(x)=0

$$x^2 - 1 = 0 \; si\ despejamos\ |x| = 1 \; siendo\ x = \pm 1$$

Las soluciones de dicha ecuación son +1 y -1. Entonces "esos dos valores son las raíces de la función dada"

5. ORDENADA AL ORIGEN DE UNA FUNCIÓN

Se llama ordenada al origen de una función, a la imagen de "cero" por la función.

El cero debe pertenecer al dominio f(0)= Ordenada al Origen. Gráficamente es el punto donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas o eje y.

POR EJEMPLO

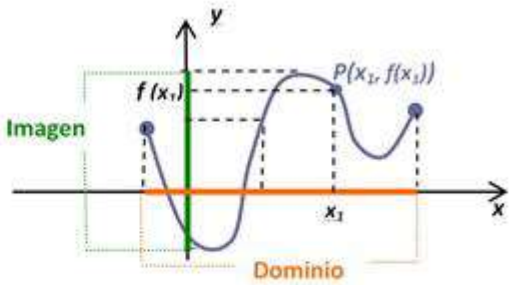
$$f\colon IR \to IR \; tal\ que\ x^2 - 1$$

Para determinar la ordenada al origen de f calculamos:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1 \to ordenada\ al\ origen$$

6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La representación gráfica de una función se hace sobre un plano cartesiano. El gráfico de una función $f\colon D \to IR / \; y = f(x)$, es el conjunto de todos los puntos del plano cartesiano de la forma $P\big(x, f(x)\big) \; o \; P\,(x, y)$ los que la primera componente pertenece al dominio de la función, y la segunda componente es la respectiva imagen.



- ✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

Concepto básico de funciones (informal)
https://www.youtube.com/watch?v=eViT5wKoN-Q
Interpretación de gráficos (problemas)
https://www.youtube.com/watch?v=lzVLS3vRdNA
Relación- Función
https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE
Formas de representar una función
https://www.youtube.com/watch?v=A7OrJ8IlIeE&t=10s

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 8

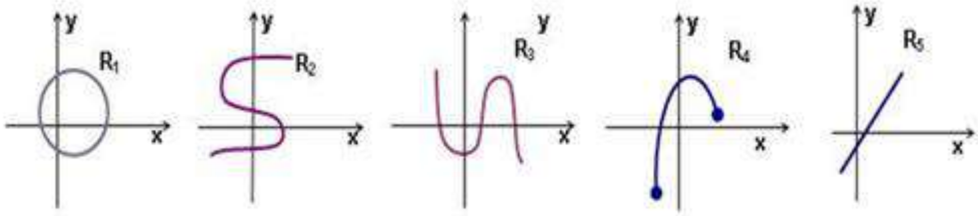
FUNCIONES

Interpretación de gráficos

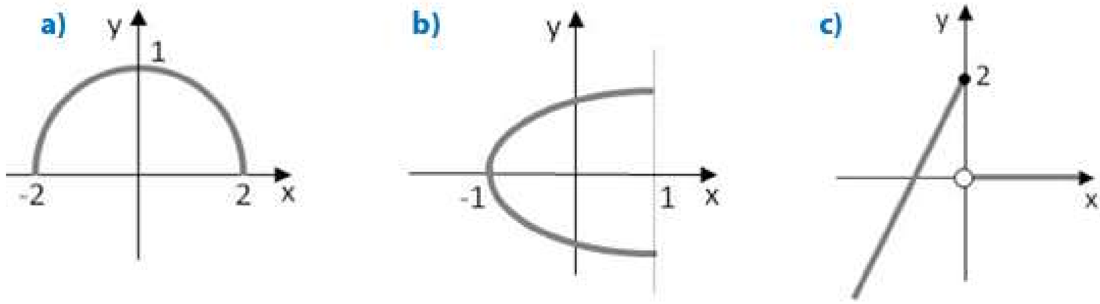
DURACIÓN: 4 horas

1. Indicá, justificá, cuál de las siguientes relaciones son funciones.

   Ayuda: trace rectas verticales y observé cuántos puntos de corte tiene cada recta con la gráfica; si es más de uno no es una función.

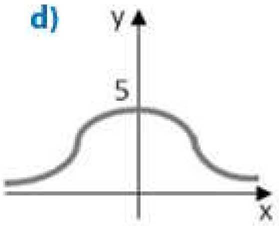


2. Indicá cuáles de los gráficos corresponden a funciones de A en B:



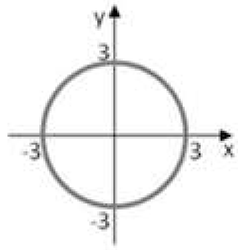
$A = [-2, 2]$ $B = \mathbb{R}$ $A = [-1, 1]$ $B = [-1, 1]$ $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$

d)



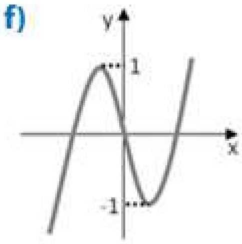
$A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$

e)



$A = [-3,3] \quad B = [-3,3]$

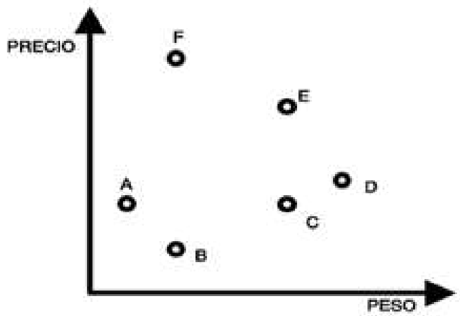
f)



$A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$

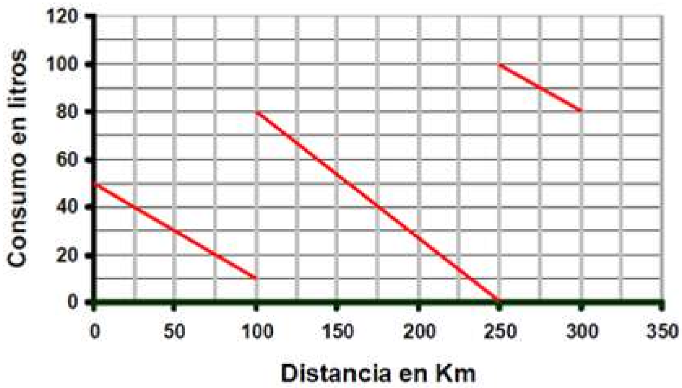
3. Cada punto de este gráfico representa una bolsa de azúcar. Observando el gráfico respondá:

   a. ¿Cuáles son las variables que intervienen?
   b. ¿Qué bolsa es la más pesada?
   c. ¿Qué bolsa es la más barata?
   d. ¿Qué bolsas tienen el mismo peso?
   e. ¿Qué bolsas tienen el mismo precio?
   f. ¿Qué bolsa conviene más E o C? ¿Por qué?
   g. ¿La gráfica corresponde a una función?

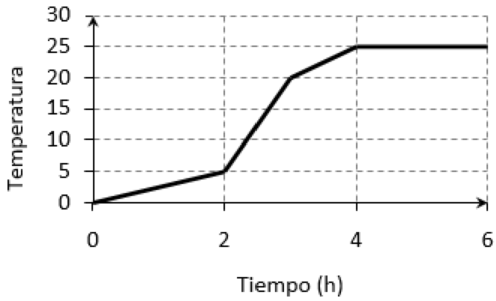


4. El gasoil que hay en un depósito de un autobús viene representado por la siguiente gráfica:

   a. ¿Cuántos litros tenía el depósito al salir?
   b. ¿Cuántos litros tenía a su llegada?
   c. ¿Cuántos litros consumió durante el viaje?
   d. ¿Qué ocurrió en el km. 250?
   e. ¿Cuándo puso el conductor por primera vez gasoil?
   f. ¿Corresponde el gráfico a una función?



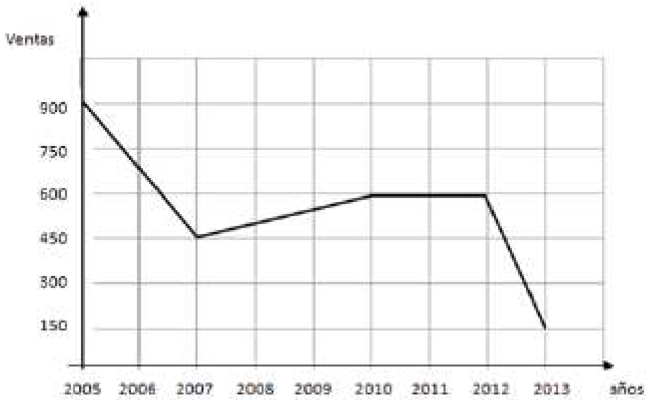
5. El siguiente gráfico muestra la variación de temperatura de un alimento en función del tiempo transcurrido desde que fue sacado de la heladera.



Contestá las siguientes preguntas:

a. ¿A qué temperatura fue retirado de la heladera?
b. ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó 20°C?
c. ¿Durante qué hora aumentó más rápidamente la temperatura?
d. ¿A qué hora disminuyó la temperatura?
e. ¿A partir de qué hora mantuvo la temperatura constante?
f. ¿Qué temperatura alcanzó al finalizar la segunda hora?
g. ¿Corresponde el gráfico a una función?

6. El siguiente gráfico representa la cantidad vendida de televisores entre los años 2005 y 2013.

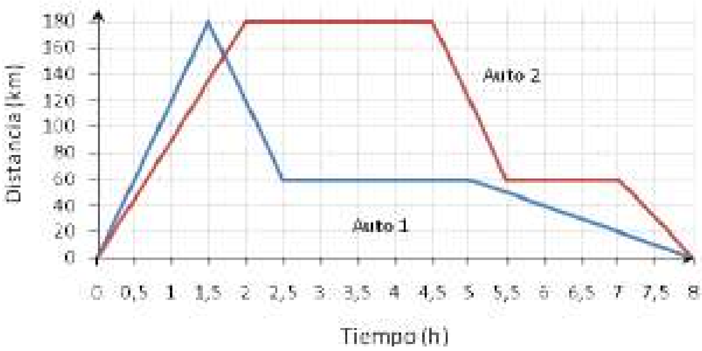


a. ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?
b. ¿Cuántos televisores se vendieron en el año 2013?

c. ¿Entre que años las ventas se mantuvieron constantes?

d. ¿Qué ocurrió con las ventas en el periodo 2005- 2007?

7. Las siguientes gráficas corresponden a dos autos que salen de una misma ciudad A y regresan a ella después de hacer una excursión.



a. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

b. ¿Qué distancia recorrió cada auto durante la primera hora y media del viaje?

c. Los ocupantes de ambos vehículos se detienen a comer y a descansar. ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

d. ¿En qué vehículo viajan los que a la vuelta de la excursión se detienen a tomar unos refrescos? ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

e. ¿Cuántos km recorrieron durante la excursión?

GUÍA DE TRABAJO N° 9

FUNCIONES

Funciones Polinómicas

Se llama función polinómica de grado n a la función definida de la forma $f: IR \to IR$ tal que: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ siendo n= natural

$$Donde \begin{cases} \textbf{n es un número natural} \\ \mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n} \text{son números reales, llamados } \textbf{coeficientes}: \\ \mathbf{a_n} \text{recibe el nombre de } \textbf{coeficiente principal} \\ \mathbf{a_0} \text{es el } \textbf{término independiente} \end{cases}$$

1. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 1 (Función afín)

Se llama **función afín** a toda función definida como:

$$f: IR \to IR$$

$$x \to y = f(x) = a.x + b$$

Donde a y b son números reales y a ≠ 0

La función afín es una función polinómica de grado 1. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios: $f(x) = a_1x + a_0$

La gráfica de una función afín es una **RECTA**, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$f(x) = a.x + b$$

a es el ***coeficiente del término lineal***, gráficamente representa la ***"pendiente"*** de la recta

b es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde *f* corta al eje de las ordenadas *y*.

- Cuando b = 0 la función recibe el nombre de "**FUNCIÓN LINEAL**"

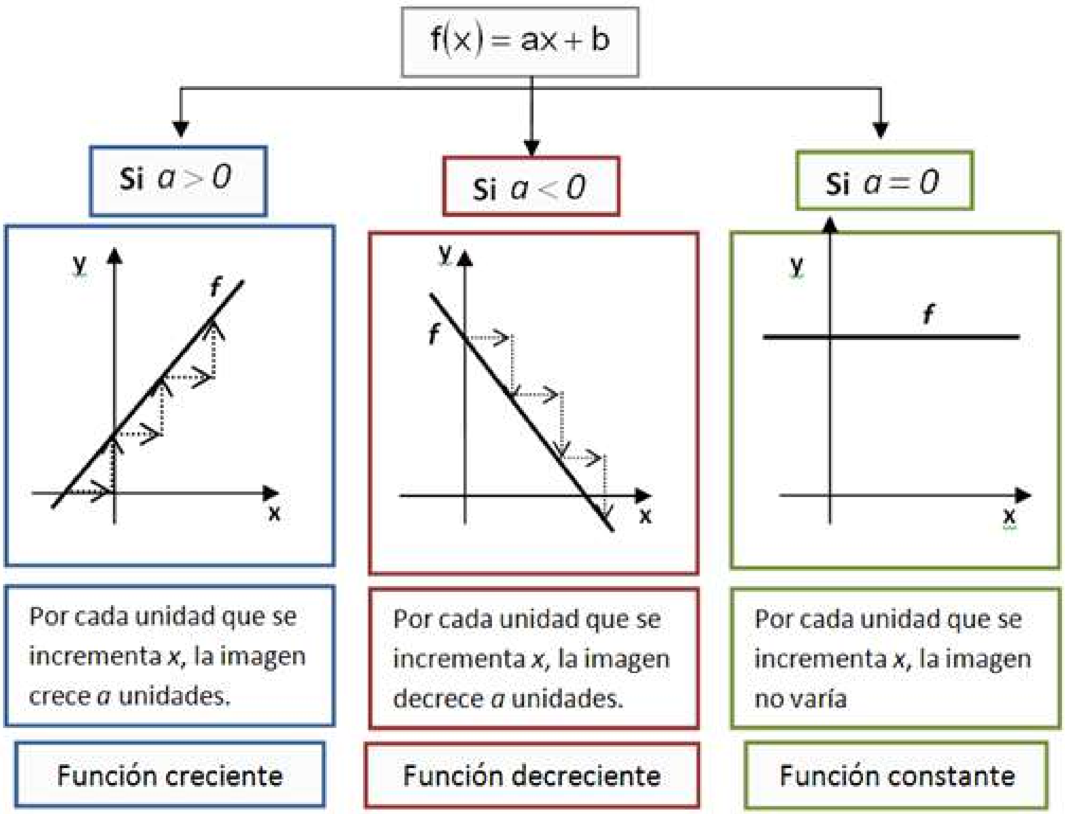
Expresión	**Gráfica**
$f(x) = a.x$	La recta pasa por el origen de coordenadas

- Cuando a = 0 es una función polinómica de grado cero llamada " **FUNCIÓN CONSTANTE**"

Expresión	**Gráfica**
$f(x) = b$	La recta es paralela al eje de abscisas

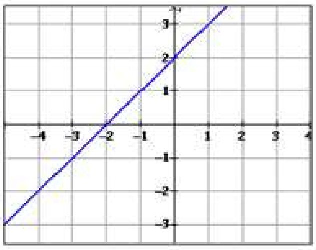
Importante: la función constante **no es una función afín** porque **a = 0**. La incluimos en este análisis porque su gráfica es una recta.

2. ANÁLISIS DEL COEFICIENTE PRINCIPAL

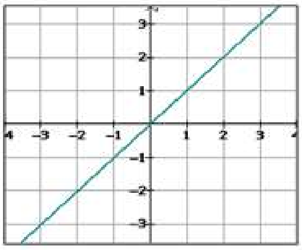


La pendiente nos indica cuantas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, por cada unidad que aumenta la variable independiente.

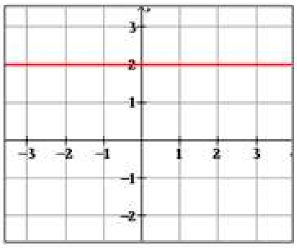
POR EJEMPLO



Función afín



Función lineal



Función constante

3. RAÍZ DE LA FUNCIÓN AFÍN

Por ser una función polinómica de grado uno, tiene una raíz real y es por definición el valor de la variable independiente que anula la función.

$$f(x) = ax + b$$
$$0 = ax + b \rightarrow \ -b = ax \rightarrow x = \ -\frac{b}{a}$$

4. ORDENADA AL ORIGEN

Es la imagen de la función cuando x= 0

$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$$

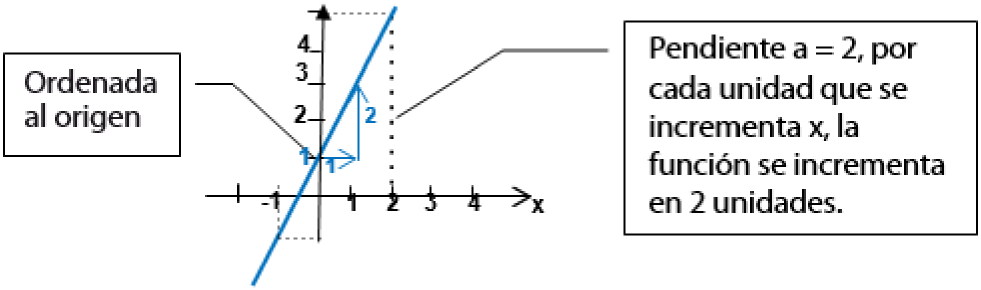
Definición	Gráficamente
Raíz f(x) = 0	la recta corta al eje de abscisas
Ordenada al origen f(0)	la recta corta al eje de ordenadas

5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN AFÍN

POR EJEMPLO

Ejemplo 1:

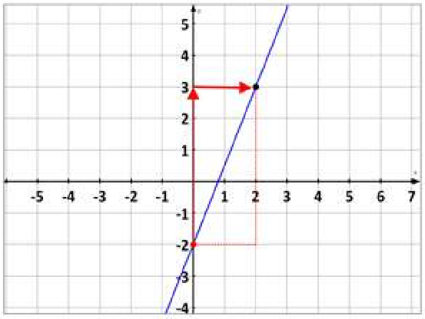
Consideremos la función $f: IR \rightarrow IR \ / \ y = 2x + 1$.
La representamos a partir de su pendiente y ordenada al origen.



Obtención de la expresión de la función a partir de la gráfica

Consideremos las siguientes gráficas:

a) Ordenada al origen b = -2



Subo 5 unidades en y
Corro dos unidades a la derecha en x

Pendiente: $a = \frac{5}{2}$

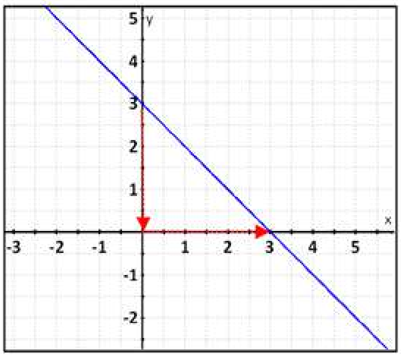
La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = \frac{5}{2}x - 2$

b) Ordenada al origen b = 3

Bajo 3 unidades en y
Corro 3 unidades a la derecha en x

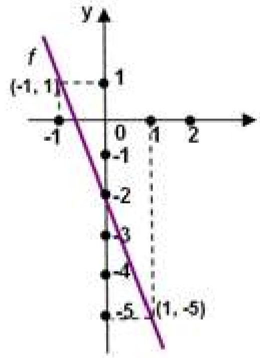
Pendiente: $a = \frac{-3}{3} = -1$

La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = -x + 3$



Ejemplo 2:
También es posible representarla mediante una tabla de valores. Es importante recordar desde la axiomática, que por dos puntos distintos pasa una y solo una recta a la que pertenecen, por lo que es suficiente calcular dos puntos de la misma.

Sea $f: IR \rightarrow IR \ / y = -3x - 2$

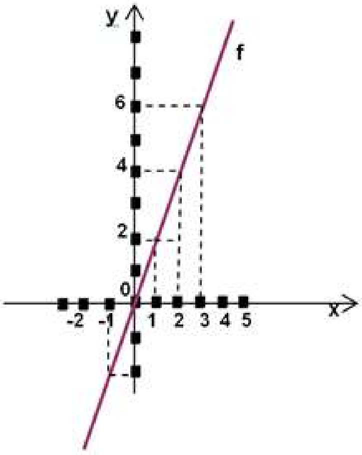


x	y	P (x, y)
-1 1	f(-1)=1 f(1)=-5	(-1,1) (1,-5)

Si la función es lineal b=0. Su gráfica pasa por el origen de coordenadas

Analicemos la función: $f(x) = 2x$

Utilizando una tabla de valores para su representación



x	y
1 2 3	2 4 6

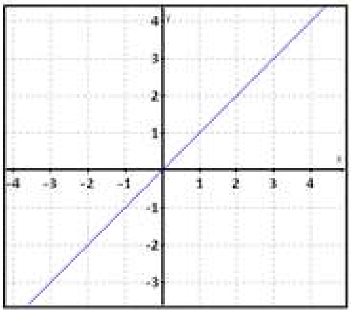
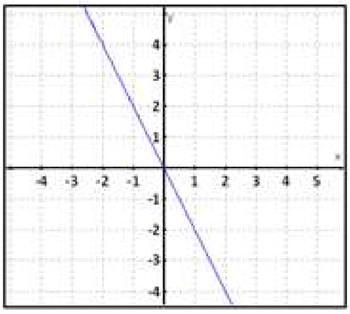
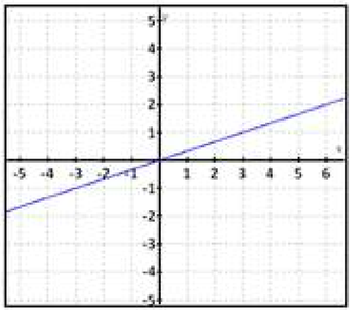
Al calcular la razón entre la ordenada y la abscisa de cada punto obtenemos:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 = a$$

En el caso de una función lineal, la razón entre la ordenada y la abscisa de un punto perteneciente a la recta es igual a la pendiente de la misma.

No tenemos en cuenta el origen de coordenadas

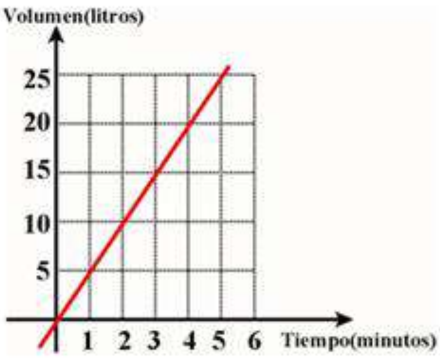
Ejemplo 3:

$y = x\ (función\ identidad)$ $\qquad y = -2x$ $\qquad y = \frac{1}{3}x$

Ejemplo 4:

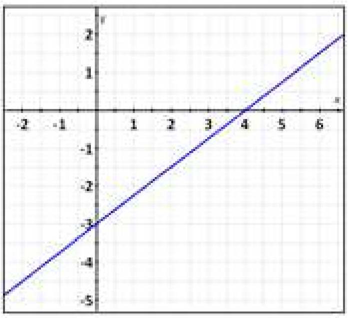
Supongamos un estanque que está vacío. Se abre un grifo y se comienza a llenar a razón de 5 litros por minuto. La variable independiente es el tiempo, medido en minutos, la dependiente es la cantidad de litros que ingresan al estanque. Hallar una función que represente la situación dada.



Ordenada al origen b = 0. Pendiente a = 5. La función representada es f(x) = 5.x

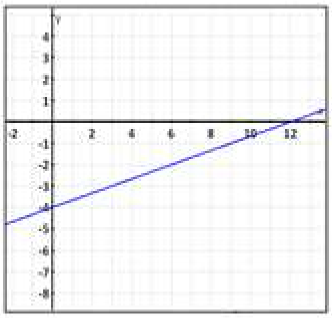
Ejemplo 5:

Vimos representación utilizando tabla de valores, dos puntos que podemos utilizar para su representación, son la intersección con los ejes.



$f: IR \to IR \ / \ y = \frac{3}{4}x - 3$

Ordenada f(0) = -3
Raíz x = 4



$f: IR \to IR \ / \ y = \frac{1}{3}x - 4$

Ordenada f(0) = -4
Raíz x = 12

6. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN

Para obtener f(x) a partir de la función o de su gráfica, consideramos tres casos:

a) Datos: pendiente y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función.

Ejemplo: a = 4 y la recta pasa por el punto (1,3) esto equivale a decir que $f(1) = 3$ (la imagen del 1 es 3)

Partimos de la función $f(x) = ax + b$, podemos utilizar la notación $y = ax + b$

Conocemos a = 4, reemplazamos $y = 4x + b$, para determinar b, tenemos en cuenta:
Para x=1 y=3 en la ecuación nos queda: $3 = 4(1) + b \Rightarrow b = -1$

La función que cumple con las condiciones es: $y = f(x) = 4x - 1$

b) Datos: ordenada al origen y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función.

Ejemplo: b= 3 y la recta pasa por el punto (5,2)

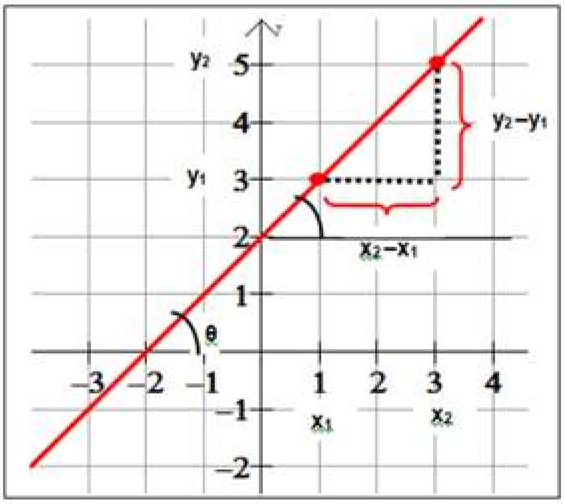
Reemplazamos b en la expresión $y = ax + 3$, sabemos que para x=5, y=2

$$2 = a(5) + 3 \Rightarrow a = \frac{2-3}{5} = -\frac{1}{5}$$

La función que cumple con las condiciones es: $y = f(x) = -\frac{1}{5}x + 3$

c) Datos: se conocen dos puntos por donde pasa la recta, o lo que es lo mismo dos valores de la función.

En este caso, tenemos dos incógnitas: la pendiente y la ordenada al origen.
Cálculo de la pendiente



La pendiente de la recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x. Su fórmula de cálculo es:

$$tg\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyascente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el gráfico el punto $(x_1, y_1) = (1,3)$ y el punto $(x_2, y_2) = (3,5)$

$$tg\ \theta = a = \frac{5-3}{3-1} = 1$$

Conocido la pendiente, despejamos b como en el punto anterior, ya que conocemos dos puntos que pertenecen a la recta, podemos reemplazar cualquiera de los dos
$y = ax + b$ reemplazamos: $y = x + b$ teniendo en cuenta que para x=1 y=3
$3 = 1(1) + b \Longrightarrow b = \ 2$ valor que vemos en el gráfico $f(x) = \ x + 2$

Otra forma de obtener a partir de dos puntos la expresión de f(x), es utilizando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$ y reemplazamos los puntos.

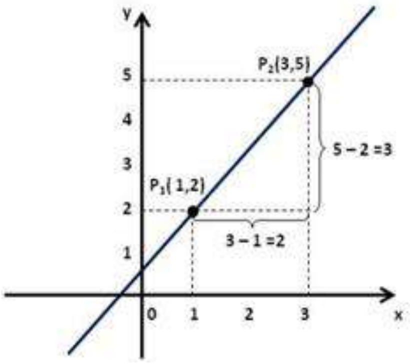
Si observamos la ecuación el término $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta.

Para el ejemplo:

$$y - 3 = \frac{5-3}{3-1}.(x-1) \ \Longrightarrow y - 3 = \frac{2}{2}.(x-1) \Longrightarrow y - 3 = 1.(x-1) \ \Longrightarrow y = x + 2$$

POR EJEMPLO

Construir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,2) y\ P_2(3,5)$



Utilizamos la expresión de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

$$y - y_1 = a.(x - x_1)$$

Reemplazando por las coordenadas de los puntos y la pendiente calculada resulta:

$$y - 2 = \frac{3}{2}.(x - 1)$$

Despejamos

$$y = \frac{3}{2}.x + \frac{1}{2}$$

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=WAXC8sVupN0

https://www.youtube.com/watch?v=PzpCT9CDqRw

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 9

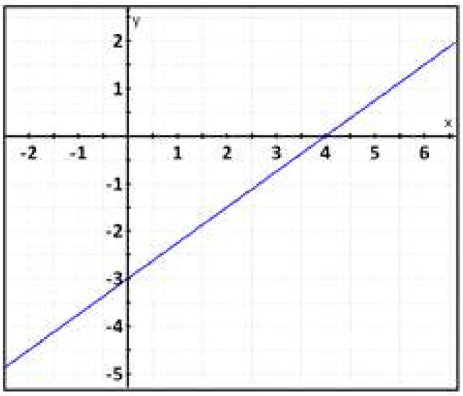
FUNCIONES

Funciones Polinómicas

DURACIÓN: 5 horas

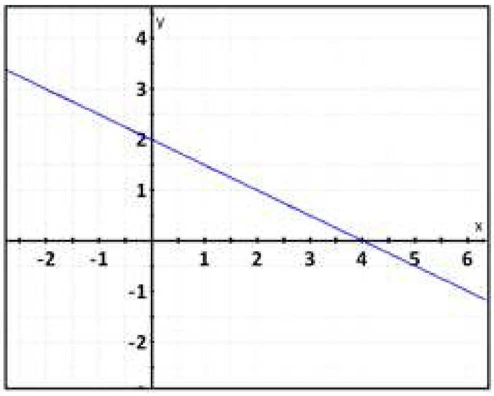
1. Encontrá la fórmula de las siguientes funciones afines dadas por su gráficos:

a)



$f(x) =$

b)



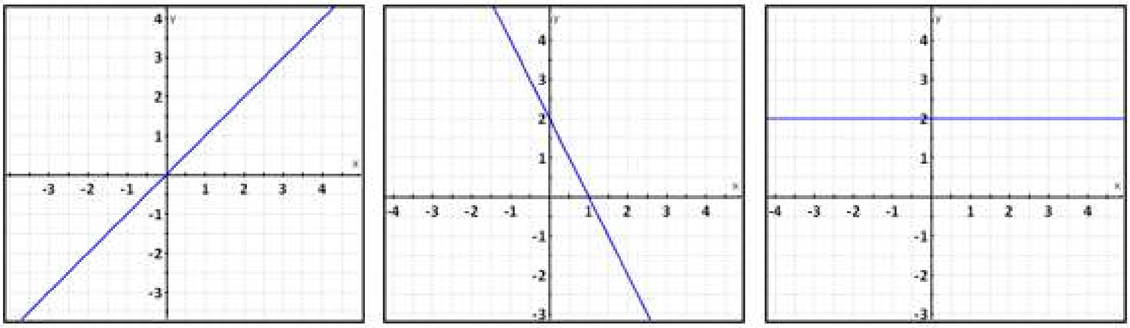
$f(x) =$

2. Dadas las siguientes funciones afines:

$f(x) = -2x + 4$ $\qquad$ $g(x) = 5x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{3}x - 4$

- **a.** Indicá la pendiente y la ordenada al origen.
- **b.** El valor de la raíz.
- **c.** Representá gráficamente cada función.

3. Observá las siguientes gráficas para contestar los ítems que siguen:



a. Uní con flechas, según corresponda:

La función f(x) tiene pendiente	nula
La función g(x) tiene pendiente	positiva
La función h(x) tiene pendiente	negativa

b. Encerrá la fórmula correspondiente en cada caso:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \\ -x \\ \frac{1}{2}x \\ ninguna\ de\ las\ anteriores \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+2 \\ -2x+2 \\ 2x+2 \\ ninguna\ de\ las\ anteriores \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x \\ 2x \\ 2 \\ ninguna\ de\ las\ anteriores \end{cases}$$

4. Un plomero cobra $15 por la visita a domicilio y $25 por cada hora de trabajo.

Horas de trabajo	0	1	2	3	4	5
$						

a. Completá la tabla de valores.

b. Representá gráficamente, escribí las magnitudes en los ejes.

c. Hallá la pendiente.

d. Hallá la ordenada al origen.

e. Escribí la fórmula.

Nota: x =0 hace referencia a la visita a domicilio

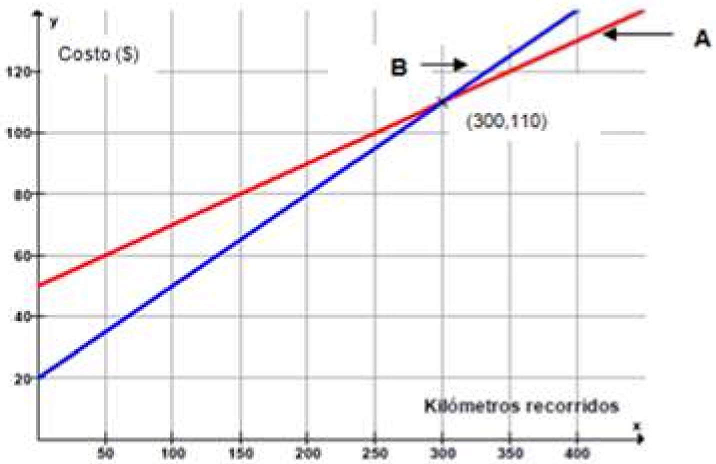
5. Hallá la ecuación de una recta que cumpla las siguientes condiciones:

a. Pasa por los puntos $(-2,3)\ y\ (4,2)$

b. $f(0) = 2\ y\ f(-1) = 0$

c. $f(4) = -5\ y\ f(6) = 7$

6. En el siguiente gráfico, se ha representado el costo de alquiler de un vehículo, en función de los km. recorridos.



Obtené para cada agencia, la expresión analítica de la función que nos da el costo total según los km. recorridos.

a. Determiná en cada caso, cuál es el costo por km recorrido.

b. Explicá el significado de la ordenada al origen, para cada una de las agencias.

c. Analizá cuál de las dos opciones es más conveniente en función de los km que se deseen recorrer.

7. Encontrá la fórmula para calcular la cantidad de agua que queda cada día, en una represa que pierde agua de manera uniforme, si la cantidad inicial es de 1150 millones de litros y los datos diarios son:

Día	1	2	3
Volumen (millones de litros)	1130	1110	1090

a. ¿Si continúa la pérdida de 20 millones de litros por día, en cuánto tiempo se quedará vacía la represa?

b. ¿Cuándo tendrá 150 millones de litros?

8. Una población que tenía 20.000 personas en 1995, va aumentando siempre de la misma manera como se muestra en la tabla. Construye una gráfica y estima la cantidad de personas que habrá este año (suponiendo que se mantiene la tendencia). Encuentra una fórmula general para calcular la cantidad de personas en función del tiempo. ¿Cuándo se superarán las 100.000 personas?

t(años)	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**…**
P (miles de personas)	20	24	28	32							

Nota: Cuando se trabaja con el tiempo, para obtener la expresión de la función que representa la situación planteada, tenemos en cuenta que el año de inicio de la medición le asignamos el valor x= 0 (1995), de esta manera al año2015 le corresponde x= 20

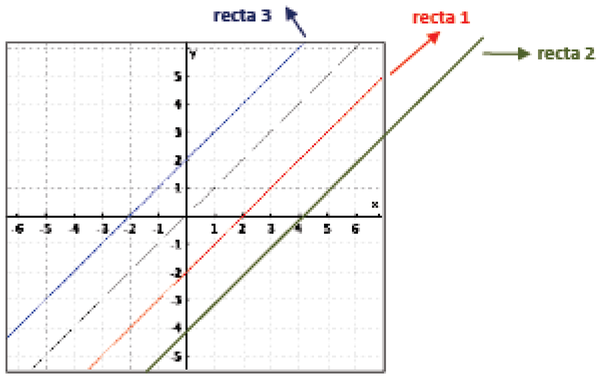
9. Para invitar a un concierto a sus amigos, Juan tiene dos posibilidades:

- A: Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de $100 y pagar las entradas a $70 cada una.
- B: Pagar cada entrada a $95.

Sea x el número de invitados de Juan: Obtener en función de x el precio a pagar en los dos casos. Finalmente, Juan se presenta al concierto con 7 amigos.

¿Qué solución habría debido adoptar?

10. Para cada una de las rectas representadas encontrá:

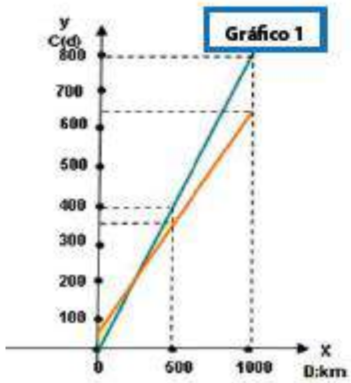


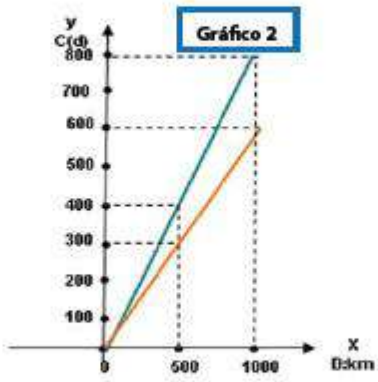
a. La ecuación.

b. La raíz.

c. La ordenada al origen.

11. Matías quiere realizar un viaje de 1000 km. Para ello visita dos empresas que le brindan la siguiente información. En la primera, el costo es de \$0,8 por kilómetro recorrido y en la segunda, se paga un costo fijo de \$50 y \$0,6 por kilómetro recorrido. Es importante tener en cuenta que en ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente.



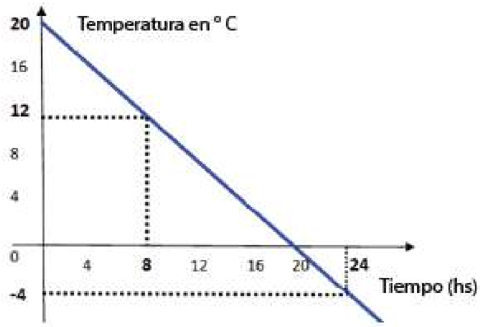


a. ¿Cuál de los dos gráficos representa el problema planteado? Justificá la respuesta.

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta corresponde a cada gráfico?

c. ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

12. El siguiente gráfico representa la temperatura medida en un laboratorio de una cierta sustancia durante 24 hs.



a. ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

b. ¿Qué temperatura se registró al inicio de la medición?

c. ¿En algún momento la temperatura fue de cero grado?

d. ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta?

e. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa gráficamente la situación planteada?

f. ¿Qué temperatura se registró a las 3 y media de la mañana?

13. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = -5x + 10$$

$$g(x) = 3x - 8$$

a. Asigná dos valores a x para construir una tabla.

b. Graficá.

c. Determiná: pendiente, ordenada al origen y raíz.

14. Indicá los pares ordenados que pertenecen a la recta $y = \frac{3}{5}x + 9$

$a)\ (-5;\ -6) \qquad b)\ \left(-2; \frac{39}{5}\right) \qquad c)\ (3; 18) \qquad d)\ (4; 3) \qquad e)\ \left(\frac{10}{3}; 11\right)$

15. Encontrá la fórmula para calcular la cantidad de vino que queda cada día en una pileta de la que se sacan de manera uniforme, siendo la cantidad inicial de 2300 litros y los datos diarios son los siguientes:

Día	**1**	**2**	**3**
Litros de vino	2250	2200	2150

a. Si se continúan sacando 50 litros por día, ¿en cuántos días se vacía pileta?

b. ¿Cuándo le quedarán 1300 litros?

GUÍA DE TRABAJO N° 10

FUNCIONES

Funciones Polinómicas

1. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 2 (Función cuadrática)

Las funciones cuadráticas modelan gran parte de situaciones del mundo físico. El estudio de éstas, resulta de interés no sólo en Matemática sino también en algunas disciplinas como por ejemplo: Física, Economía, Biología, Ingeniería, Arquitectura.

Son útiles para describir:

- Trayectoria de proyectiles.
- Ganancias y costos de empresas.
- Variación de la población de determinadas especies.
- Efectos nutricionales de los organismos.
- Óptica, etc.

Se llama **función cuadrática** a toda función $f: IR \rightarrow IR$

Tal que $f(x) = a.x^2 + bx + c$ en la que a, b y c son números reales con a ≠ 0

La función cuadrática es una función polinómica de grado 2. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

La gráfica de una función afín es una **PARÁBOLA**, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

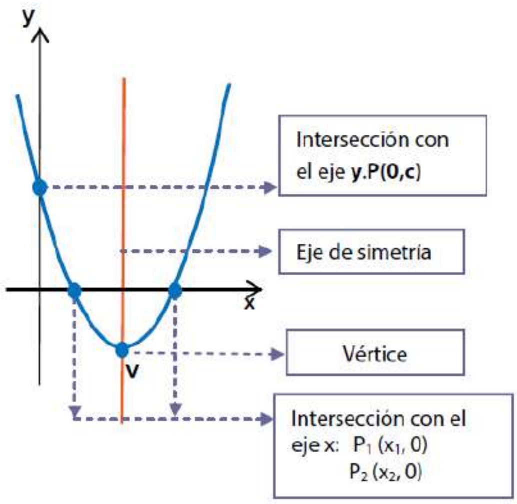
a es el ***coeficiente del término cuadrático***, dependiendo de su signo las ramas de la parábola se abren hacia arriba o abajo.

b es el ***coeficiente del término lineal ,*** dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.

c es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas y.

2. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En la gráfica es importante reconocer elementos, que son de gran utilidad para la representación de la función, como los puntos de intersección con los ejes coordenados, el vértice y el eje de simetría.



a. Eje de simetría

Toda función cuadrática tiene un eje de simetría. Este eje es paralelo al eje **y** o coincidente con el mismo. La ecuación de la recta que incluye al eje de simetría es: $x = -\frac{b}{2a}$

b. Vértices

Es el único punto de la función que es simétrico consigo mismo con respecto al eje de simetría.

Las coordenadas del vértice son: $v = \left(-\frac{b}{2}; f\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$

c. Punto de intersección con los ejes

- Eje de las ordenadas (ordenada al origen c)

  Este punto tiene por rdenada al término independiente **c** y abscisa nula.

  Las coordenadas del punto son: $P(0, c)$.

- Eje de las abscisas (raíces reales x_1 y x_2)

  Para calcular las coordenadas del o los puntos de intersección de la curva con el eje **x** se anula la expresión de la función obteniéndose una ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se pueden obtener reemplazando los coeficientes a, b, c en la siguiente expresión denominada “ **resolvente**”.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

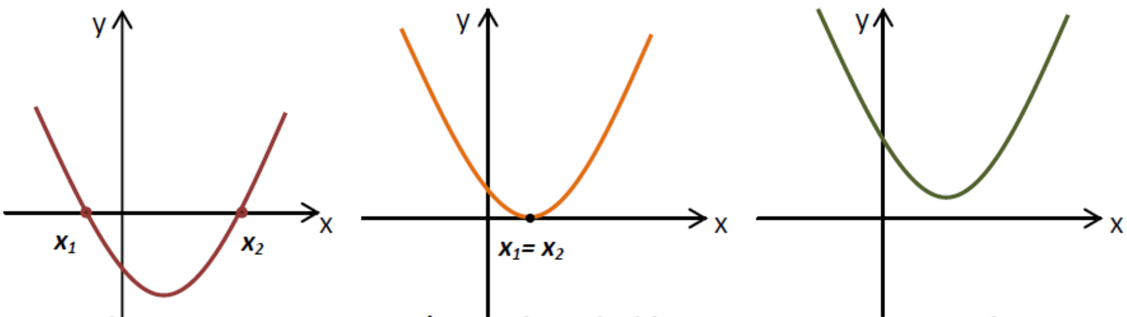
Hemos visto que el radicando recibe el nombre de discriminante, y se simboliza con la letra Δ (delta), de su valor depende del tipo de raíces.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \quad x_1 \neq x_2$ raíces reales distintas

Si $\Delta = 0 \quad x_1 = x_2$ raíces reales coincidentes

Si $\Delta < 0$ no tiene raíces reales

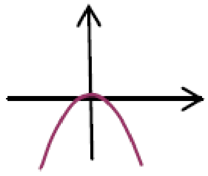
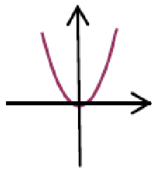
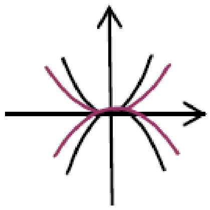
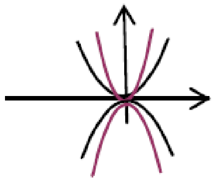


Raíces reales distintas | Raíces reales coincidentes | No tiene raíces reales

Importante: una función polinómica de grado 2 tiene dos raíces reales o ninguna

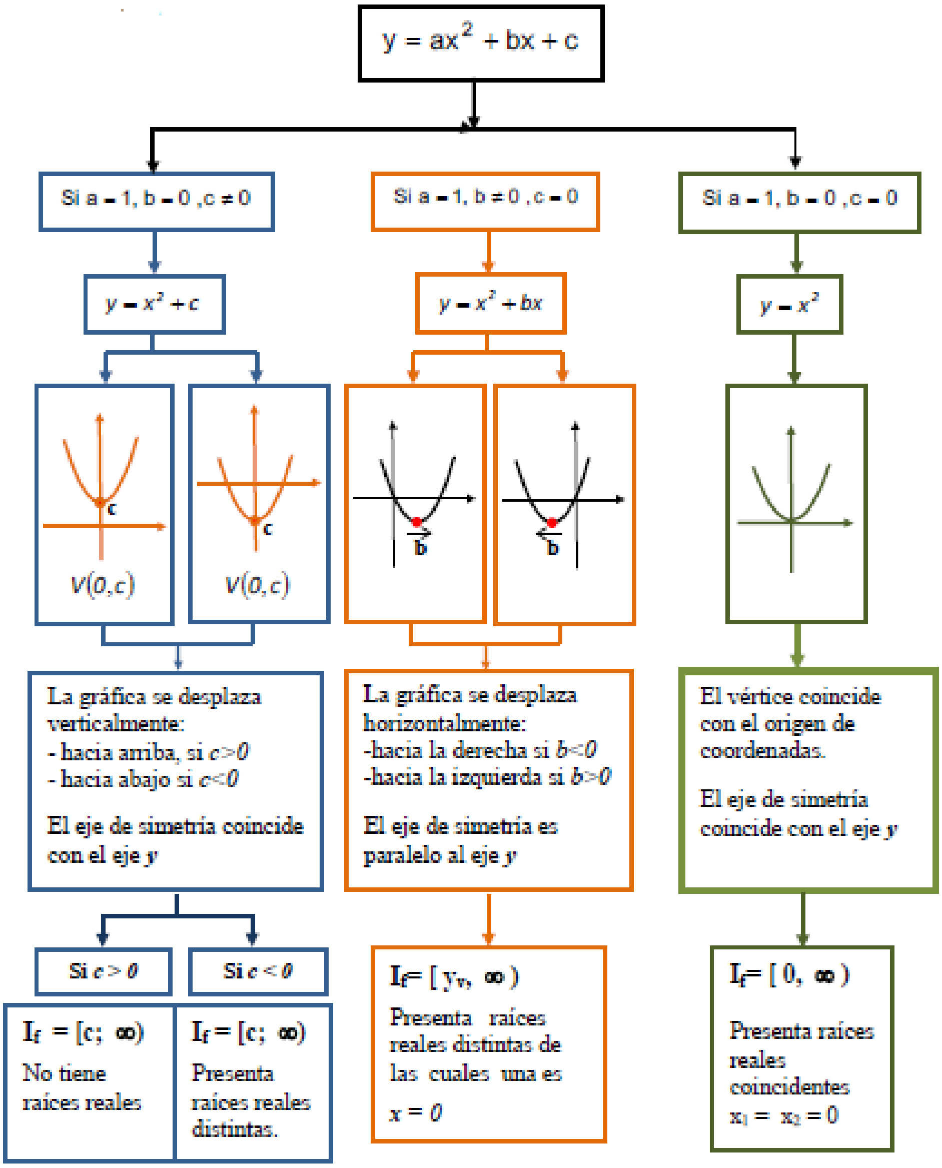
3. CARACTERÍSTICAS DE LA REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUDRÁTICA

Las características de la función cuadrática, están relacionadas con los coeficientes a, b y c. Comencemos estudiando al coeficiente principal:

Si $a < 0$, las ramas de la parábola abren hacia abajo.	
Si $a > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.	
Si $0 < \|a\| < 1$, la parábola se ensancha con respecto a la parábola en la que $\|a\| = 1$	
Si $\|a\| > 1$, la parábola se angosta con respecto a la parábola en la que $\|a\| = 1$	

Observamos entonces que de acuerdo al signo del coeficiente del término cuadrático, y conociendo las coordenadas del vértice es posible definir el conjunto imagen de la función.

¿Qué pasa con b y c?



Teniendo presente las características mencionadas es posible dibujar la parábola, conocido el vértice, la ecuación del eje de simetría y las raíces si existen y son reales distintas. En caso contrario, conocido un punto que no sea el vértice, por simetría con respecto al eje, se puede calcular o dibujar su simétrico.

4. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Hasta ahora sólo hemos trabajado con la expresión general o polinómica de la función cuadrática, a continuación te presentamos un cuadro con todas las formas de expresar la función cuadrática.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v, a \neq 0$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2), a \neq 0$	a, x_1, x_2

Expresión canónica de la función cuadrática

La expresión canónica, nos permite visualizar directamente las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

Su expresión es: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

Siendo el vértice: $V(x_v, y_v)$y la ecuación del eje de simetría $x = x_v$

Si a=1. La expresión es: $f(x) = (x - x_v)^2 + y_v$

Mediante un ejemplo analizamos la construcción de la expresión canónica a partir de la expresión polinómica de la función cuadrática.

POR EJEMPLO

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$

Si analizamos la expresión canónica, observamos que consta de dos términos:

- El primero, es un producto cuyo primer factor es el coeficiente del término cuadrático y el segundo el cuadrado de un binomio.
- El segundo, es un número real.

1° Sacamos factor común 3 (el coeficiente del término cuadrático).	$\boldsymbol{f(x) = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)}$
2° Multiplicamos y dividimos por 2 el término lineal.	$f(x) = 3\left(x^2 - \frac{2}{2}.\boldsymbol{\frac{5}{3}x} - \boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$
3° Aplicamos la propiedad asociativa del producto.	$f(x) = 3\left(x^2 - 2.\frac{\boldsymbol{5}}{6}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$

4° Sumamos y restamos $\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$	$f(x)=3\left(x^2-2.\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{x}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}-\left(\frac{5}{6}\right)^{2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$
5° Utilizamos la igualdad $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2=\boldsymbol{x}^2-\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2$	$f(x)=3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^{2}-\frac{37}{36}\right)$
6° Distribuimos el producto con respecto a la suma.	$f(x)=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^{2}-3.\frac{37}{36}$
7° Obtenemos así la forma canónica.	$f(x)=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^{2}-\frac{37}{12}$

Siendo las coordenadas del vértice: $V\left(\frac{5}{6};-\frac{37}{12}\right)$

Y la ecuación del eje de simetría: $x=\frac{5}{6}$

Expresión factorizada de la función cuadrática

Sean $x_1\ y\ x_2$ las raíces de una función cuadrática, y a el coeficiente del término cuadrático, la expresión factorizada de la función cuadrática tiene por expresión:

$$f(x)=a.(x-x_1).(x-x_2)$$

POR EJEMPLO

Si $f(x)=2x^2-4x-6$, el coeficiente principal es a= 2, y sus raíces reales son $x_1=3\ y\ x_2=-1$, entonces la expresión factorizada es:

$$f(x)=2.(x-3).(x+1)$$

5. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

POR EJEMPLO

Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t)=40t-16t^2$

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?

d) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 20 pies?

Solución:

Para poder estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función $h(t)$, y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

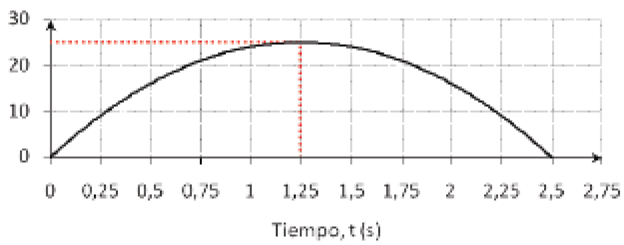
- **Coeficiente del término cuadrático**: -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).

- **Ceros o raíces**: $40t - 16t^2 = 0$ que resolviendo dan: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{5}{2}$

- **Coordenadas del vértice**: $V(x_v; y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2.(-16)} = \frac{5}{4} \ ; \ \ y_v = -16\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 40.\frac{5}{4} = 25 \quad \Longrightarrow V(\frac{5}{4}; 25)$$

- **Ordenada al origen**: $h(0) = 40.0 - 160^2 = 0$



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima 25 pies (y v) a los 1,25s (x v); y cae al piso a los 2,5s (cero o raíz).

Para calcular el tiempo necesario para alcanzar una altura determinada, planteamos la ecuación cuadrática:

$$h(t) = 40t - 16t^2$$
$$20 = 40t - 16t^2 \rightarrow 0 = -16t^2 + 40t - 20$$

Entonces, las respuestas al problema son:

a) La altura alcanza por la pelota es de 25 pies.

b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.

c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.

d) La pelota tarda en alcanzar 20 pies de altura, 0,69 y 1,8 segundos aproximadamente.

✓ Los siguientes videos te permitirán comprender y reafirmar mejor estos contenidos.

https://www.youtube.com/watch?v=YlhOfpREfHE

https://www.youtube.com/watch?v=iZ4guTg3tXg

EJERCITACIÓN

GUÍA DE TRABAJO N° 10

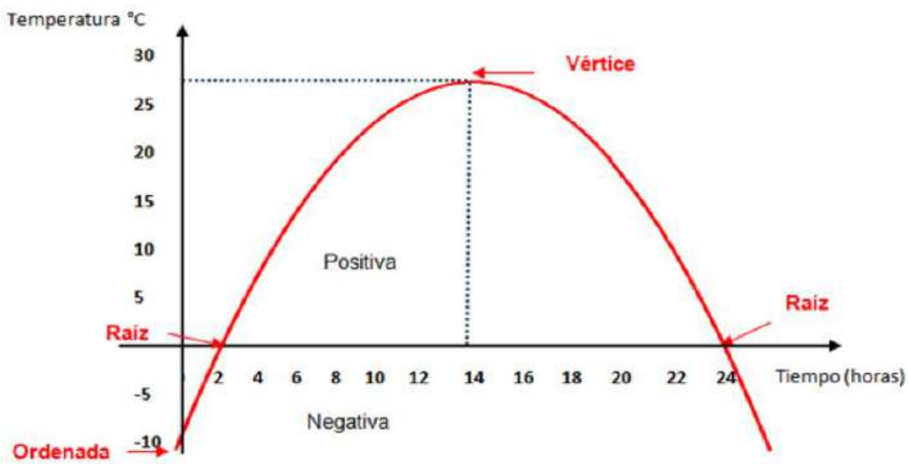
FUNCIONES

Funciones Polinómicas

DURACIÓN: 6 horas

1. Leé la siguiente situación.

   En un laboratorio comenzaron a las 0 horas a medir la temperatura de una sustancia. La medición se hizo durante el resto del día y se obtuvo un gráfico que relaciona la temperatura con el tiempo.



   Analizá el grafico y respondé las consignas:

   a. ¿En qué horario se registraron temperaturas sobre cero?

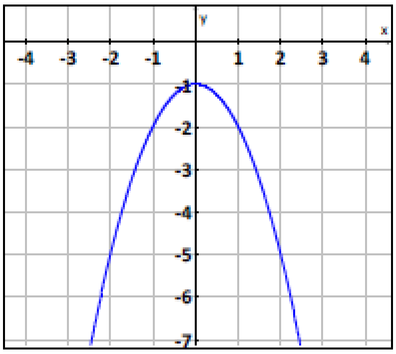
   b. ¿En qué horario se registraron temperaturas bajo cero?

   c. ¿Cuál fue la temperatura al inicio de la medición?

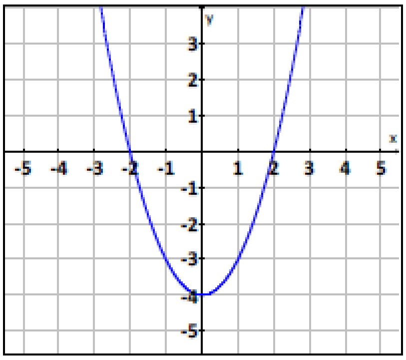
   d. ¿Durante qué horas se midió un descenso de temperatura?

   e. ¿Cuál es la máxima temperatura registrada? ¿A qué hora se hizo la medición?

2. Dadas las siguientes gráficas:



$y = -x^2 - 1$



$y = x^2 - 4$

a. Escribí las coordenadas de los vértices de cada una de ellas.

b. Para cada función, escribí la ecuación del eje de simetría.

c. Identificá y señalá las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes para cada gráfica, si existen.

d. Definí el conjunto imagen para cada una de las funciones dadas.

3. Encontrá una función cuadrática que tenga como ceros $x_1 = 3\ y$ $x_2 = 2$ y cuya gráfica pase por el punto (0,10).

4. Dadas las funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2 + 4x \qquad g(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2 \qquad h(x) = x^2 - 9x + 9$

a. Escribí la función en la expresión canónica.

b. Hallá la intersección con los ejes coordenados.

c. Graficá la parábola.

5. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas definidas de IR →IR:

$f(x) = x^2 + 2 \quad g(x) = x^2 + 6x + 9 \quad h(x) = 4 - x^2 \quad i(x) = -x^2 + 2x - 2$

a. Calculá sus ceros o raíces.

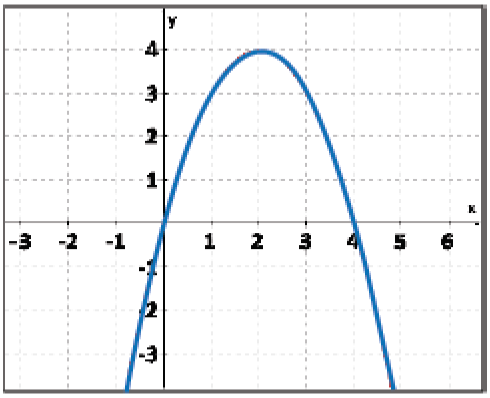
b. Indique intersección con el eje "y".

c. Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

d. Represéntelas gráficamente.

e. Halle la forma canónica, y cuando se posible, la forma factorizada.

6. A partir de la observación de la gráfica, completá con V las correctas y justificá las falsas.



a. La expresión de la función asociada a la gráfica es: $f(x) = x^2 + 4x$

b. La ecuación del eje de simetría es: x=2

c. Las coordenadas del vértice son: V(4,2)

d. $f(1) = 3$

e. $f(0) = 4$

f. Su forma canónica es: $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

g. Su forma factorizada es: $f(x) = -x(x+4)$

h. Su conjunto imagen es $(-\infty; 4)$

7. En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados, a los t años está dado por:

$$N(t) = -t^2 + 21t + 100$$

   a. ¿Colocaría alguna restricción para t? ¿Por qué?

   b. ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?

   c. ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿Cuándo ocurrirá?

   d. ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?

8. El desplazamiento S de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t, está dado por:

$$S(t) = 3{,}2t^2 - 16t + 28{,}7$$

   Donde S está en metros y t en segundos.

   a. ¿Para qué valores de t ocurre el desplazamiento mínimo?

   b. ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto?

   c. ¿Cuál es el desplazamiento para t =2?

9. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $f(z) = 1000z - 2z^2$ donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica al mes.

   a. ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

   b. ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? Y ¿375 pares?

10. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $f(x) = x^2 + 2$

b. $f(x) = x^2 + 6x + 9$

c. $f(x) = x^2 - 4x$

d. $f(x) = 4 - x^2$

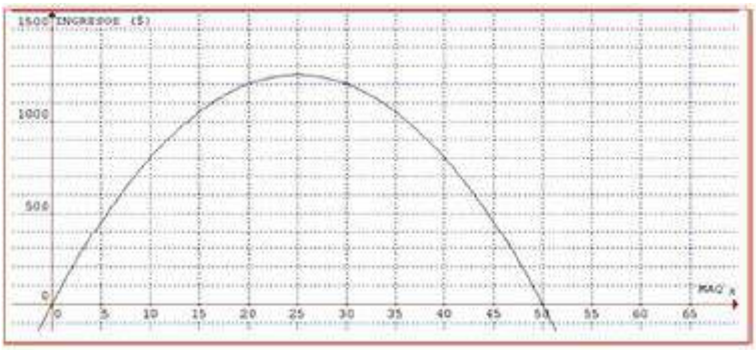
e. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

f. $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

- Encontrá su conjunto imagen.
- Calculá sus ceros o raíces.
- Indicá intersección con el eje “y”
- Hallá las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
- Representá gráficamente.

11. Los ingresos mensuales en una fábrica de máquinas electromecánicas están dados por la función: $f(x) = 100x - 2x^2$

Observá el gráfico y respondé:



a. ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

b. Si decimos que el ingreso fue de $1000 aproximadamente. ¿Cuántas máquinas se fabricaron?

c. ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 40 máquinas?

d. ¿A partir de qué cantidad de máquinas se comienza a tener pérdida? ¿Tiene relación con las raíces? Justifique su respuesta.

GUÍA DE TRABAJO N° 11

INTEGRACIÓN

DURACIÓN: 10 horas

1. Definí por comprensión los siguientes conjuntos dados:

$A = \{\ldots,1,2,3,4,5\}$ $\quad$ $B = \{0,1,2,3\}$

$C =]-3; 5]$ $\quad$ $D = \{4,5,6,\ldots\}$

$E = [0; 2]$ $\quad$ $F =]-4; 6[$

2. Expresá los siguientes conjuntos por extensión.

$A = \{x : x \in IR; x > 4\}$ $\quad$ $B = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge -4 < x < 6\}$

$C = \{x : x \in IN; x < 6\}$ $\quad$ $D = \{^{x}/_{x} \in IR \wedge |x + 4| < 5\}$

3. Completá con la fracción que falta, para obtener el resultado indicado en cada caso: Cuidado, indicá siempre la fracción irreducible que corresponda.

$\frac{1}{5} + \frac{}{} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{3} - \frac{}{} = -\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{}{} - \frac{2}{9} = -\frac{5}{9}$

4. Realizá los siguientes cálculos a través de la calculadora (recuerda que tu calculadora, calcula, por lo tanto tú tienes que razonar).

a. $23 + [14 - (34 - 16)] =$

b. $-1 - [35 - (-2 - 13) + 115] =$

c. $\frac{2}{3} + \left\{-\frac{1}{2} + \left[2 - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)\right]\right\} =$

d. $2 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\right) + 5\right] =$

5. Calculá.

I. Las 5/24 partes de un día. Expresá el resultado en horas.

II. La tercera parte, de las ⅖ partes de una quincena. Expresá el resultado en días.

III. Las 5/12 partes de 2 docenas de facturas.

IV. Las 3/7 partes de $1701 más las 5/12 partes de $876

6. Completá los espacios en blanco. La primera línea está como ejemplo.

Número	**Tercera parte**	**Tres quintas partes**	**Duplo**	**Cuadrado**	**Le sumo 1**	**Le resto 1/2**
5/3	**5/9**	**1**	**10/3**	**25/9**	**8/3**	**7/6**
1/2						
4						
			10/7			
				4/9		
					6	

7. Realizá las siguientes operaciones combinadas, aplicá propiedades cuando sea posible.

a. $$\frac{\sqrt{24 + 4 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{39}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^3} =$$

b. $$\frac{\frac{7}{5} + \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}}{5}}{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{3}} =$$

c. $$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{4}}} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5.\left(\frac{3}{4}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

En tu vida te enfrentarás a problemas de diversa índole y deberás resolverlos correctamente y con rapidez, ya que el tiempo es muy importante. Es nuestro objetivo brindarte las herramientas necesarias para que cumplas tus objetivos. Por lo que te proponemos lo siguiente a la hora de resolver problemas en matemática.

Estrategia para resolver problemas:

I. **Comprender el enunciado:**

- Asegúrate de saber el significado de todas las palabras.
- De ser posible realiza un esquema, dibujo, croquis, etc. que te ayude a interpretar el problema.
- Identificar los datos e incógnitas que te da el enunciado de forma directa (explícito) o indirectamente (implícito).
- Expresa el problema con tus propias palabras.

II. **Idear un plan:**

- Plantear una fórmula.
- Buscar problemas parecido o que te resulten más sencillos.
- Proponer al menos una forma para encontrar el resultado de la o las incógnitas.

III. **Llevar a cabo el plan:**

- Reemplazar los datos en la fórmula elegida.
- Realizar los planteos de manera ordenada, justificando o aplicando las propiedades aplicadas.
- Utilizar cálculos auxiliares cerca de la resolución de tu problema (útil para revisar cuando tengas dudas).

IV. **Verificar:**

- Cuando obtengas un resultado analiza el significado que tiene en el problema planteado, para ello hazte estas preguntas: ¿el valor es coherente con el problema? ¿sus unidades de medida son consistentes? ¿puede darme un resultado con signo negativo? ejemplo la edad de una persona. Entre otras preguntas que consideres hacer.

V. **Comunicar:**

- Cuando informes un resultado hazlo de la manera más completa y detallada que puedas. Por ejemplo: si el valor numérico de tu respuesta es 35 y te pedían calcular la edad "Andrea", te recomendamos escribir: "La edad de "Andrea" es de 35 años".

La estrategia es útil para cualquier asignatura que plantee problemas e involucre números. Es el momento de ponerse a trabajar. ¡Éxitos!

8. Leé los siguientes problemas y resolvé. Recordá anotar todos los datos, los procedimientos y los resultados.

a. Melina tiene tres hermanas. La madre de Melina le da a ella $300 y le dice que lo reparta entre ella y sus hermanas de la siguiente manera:
Que le dé ¼ del total a una de sus hermanas, ⅓ a otra, ⅕ a otra y que se quede con el resto ella. Luego le dice que la que recibió más plata de las cuatro hermanas, le dé 1/10 de lo que le tocó a la que recibió menos. ¿Con cuánto dinero se quedó Melina al final?

b. Se calcula que, en un asado, en promedio una persona adulta come 0,6 kilos de carne y un niño como 0,3 kilos de carne. Marcelo quiere organizar un asado para el día de la primavera con sus amigos. En total son 22 adultos y 6 niños. ¿Cuántos kilos de carne tiene que comprar?

c. Martín toma primero los 3/8 de la torta, luego Diego toma de la torta las 7/12 partes de lo que tomó Martín. Luego Martín toma las 4/7 partes de lo que tomó Diego. ¿Qué fracción queda de la torta?

d. De una tela de 12 metros se hicieron 18 remeras. ¿Cuántas remeras se harán de una tela de 14 metros?

e. Para fabricar 80 bolitas de vidrio se necesitan 320 gramos de vidrio. ¿Cuántas bolitas se podrán fabricar con 360 gramos de vidrio?

f. Mariano y un amigo juntaron en 10 días 160 latas vacías. ¿En cuántos días juntarán la misma cantidad de latas, si los ayudan dos amigos más?

g. Si en una compra de $120, me hacen un 5% de descuento. ¿Cuál es el monto final de la compra?

h. Si dicen que en el último mes el kilo de azúcar aumentó un 10% y el anterior había aumentado un 20%. Ahora está en $95. ¿Cuánto estaba el mes pasado?

9. Escribí las relaciones entre los datos y los valores desconocidos en estos problemas:

   a. La séptima parte de un número sumada a sus dos terceras partes da como resultado 51.

   b. Tres niños deciden hacer un regalo por valor de 1 275 pesetas. Se sabe que el mayor paga la cuarta parte de lo que paga el mediano y que éste paga 60 pesetas menos que el menor.

   c. Descomponé el número 16 en dos partes cuyo producto sea 60.

   d. La edad de un padre es triple que la de su hijo y hace 6 años era sólo el doble.

10. Calculá la solución de las siguientes ecuaciones y respondé:

    a. $12x - 5 = 3x + 31$
    ¿Cuál es el valor que toma x? …………

    b. $2 (1 +2x) = 10$
    ¿Es correcto decir que x toma el valor 2?.........

11. Completá la ecuación para que se cumpla la igualdad:

    a. 5-2 (1-…….)=2…… -3

    b. -2 (3 …… - 2) = -2

12. Resolvé las siguientes situaciones planteadas:

El siguiente video puede ser de gran ayuda:

https://www.youtube.com/watch?v=nKyRN7-P1C0

   a. Hallé tres números consecutivos cuya suma sea 219.

   b. veinticinco está formado por la división de dos números, siendo el numerador de dicha operación ciento veinticinco ¿cuánto vale el denominador?

   c. Su doble más 5 es 35.

   d. Marta tiene 15 años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Marta?

13. Determiné el tipo y número de soluciones de la ecuación.

a. $3x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

c. $x^2 + 4x = 0$

14. Para pensar:

a. Construí y escribí una ecuación de segundo grado donde sus soluciones sean reales y distintas.

b. Elaborá y escribí una ecuación de segundo orden cuyas soluciones sean complejas (imaginarias).

15. Mencioná cuál de las siguientes expresiones es correcta y en caso de ser incorrecta indicá el por qué.

a. $-b^2 - \frac{\sqrt{b+4ac}}{2}$

b. $b^2 \pm \frac{\sqrt{b-(4ac)}}{2a}$

c. $-b \pm \frac{\sqrt{b^2-(4ac)}}{2b}$

d. $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-(4ac)}}{2a}$

16. Respondé las siguientes preguntas:

a. ¿Observando la ecuación anteriormente seleccionada como correcta cuál es el significado del símbolo "$\pm$"?

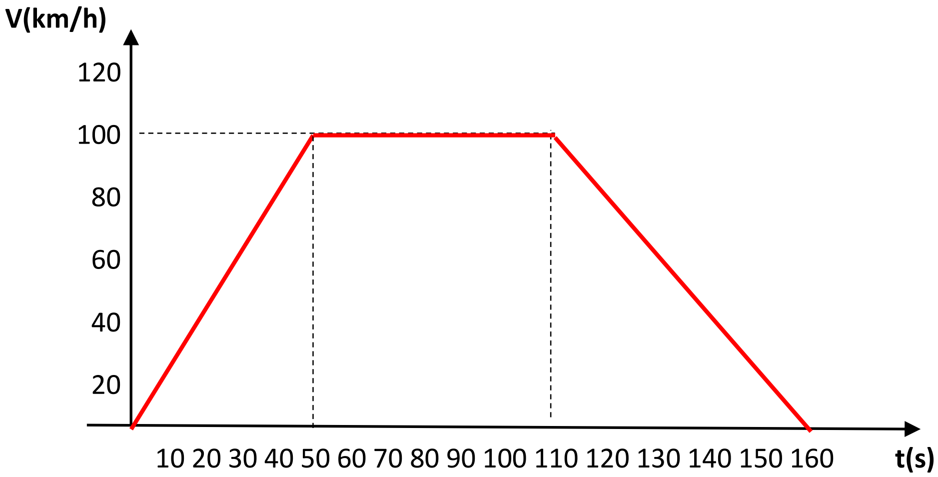
b. ¿Si el resultado de b^2 es menor que -4 . a. c, que tipo de soluciones tendrá la ecuación de segundo grado?

c. Si el coeficiente a es igual a cero ¿De qué tipo de ecuación se trata?

d. ¿Cómo se le llama a la siguiente expresión b^2-4 . a. c? ¿Por qué es útil?

17. Observá las siguientes situaciones problemáticas y resuelvé.

a. El siguiente gráfico representa la velocidad de un tren subterráneo entre las estaciones A y B.



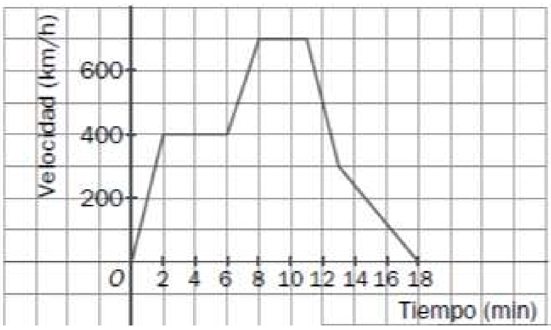
i. ¿Cuánto dura el viaje entre A y B?

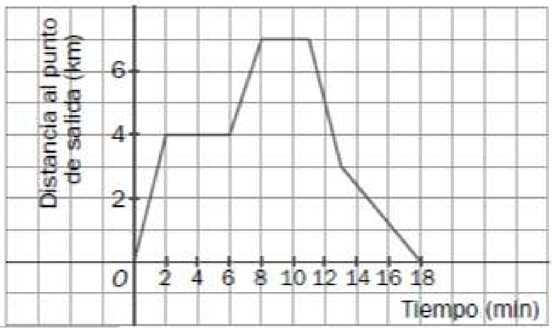
ii. ¿Durante cuánto tiempo la velocidad del tren es constante?

iii. ¿Cuál es la velocidad máxima? ¿En qué tiempo la alcanza?

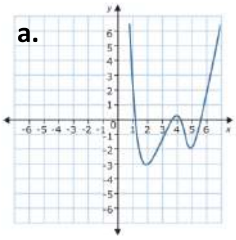
iv. ¿Cuánto tarda en frenar?

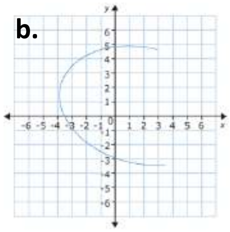
b. Las dos tienen la misma forma, pero reflejan situaciones distintas. ¿Por qué? Justificá tu respuesta.

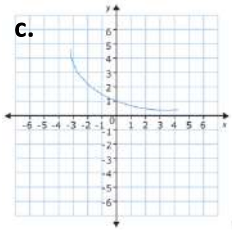


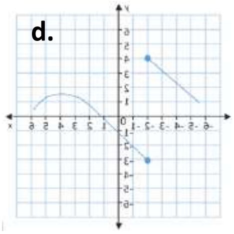


18. Indicá cuáles de los siguientes gráficos son funciones, justificá.







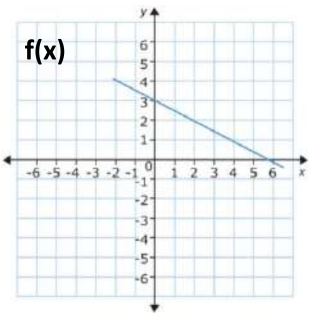


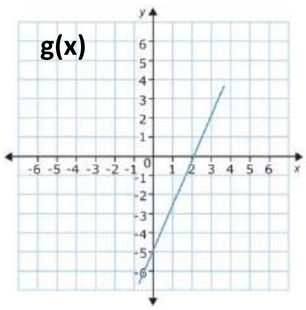
19. Dada las siguientes funciones

$f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ $\qquad g(x) = 3x + 1$ $\qquad h(x) = x$ $\qquad i(x) = 4$

- a. Indicá cuál es la pendiente y la ordenada al origen.
- b. Calculá el cero de la función.
- c. Graficá.

20. Encontrá la fórmula de las siguientes funciones afines dadas por su gráfica.





21. Interpretá las siguientes situaciones y escribí la función que represente a cada caso.

- a. Martín escribe con el teclado de la computadora 50 palabras por minuto.
  - i. Escribí una función f(x) que represente la cantidad de palabras en función de los minutos.
  - ii. Escribí una función g(x) que represente la cantidad de minutos en función de la cantidad de palabras.
- b. El valor actual de cierta clase de antigüedad es igual a \$1200 más \$300 por cada año de antigüedad. Escribí la función f(x) que represente al valor actual de la antigüedad en función de los años de antigüedad.

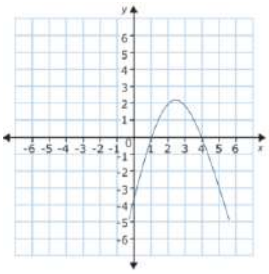
22. Dada La ecuación factorizada, escribí la ecuación polinómica y canónica:

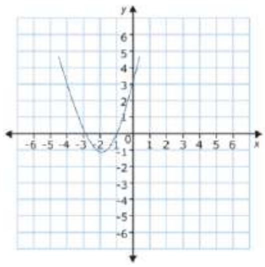
a. $y = (x + 1).(x + 4)$

b. $y = -4(x - 1/4).(x - 3)$

c. $y = -1.(x + 1).(x - 6)$

23. Reconstruí las ecuaciones de las siguientes parábolas (forma polinómica)





24. Buscá el valor de "k" para que el vértice de la parábola sea el punto (1;3):

a. $y = 2x^2 - k.x + x + 1$

b. $y = \frac{8+k}{3}x^2 - 6kx + 6$

25. Cuando la parábola tiene una sola raíz real. ¿Cuánto vale la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$?

26. Buscá el valor de "k" para que la parábola tenga una sola raíz.

a. $y = x^2 + (k - 1).x + 1$

b. $y = -x^2 - k$

27. Resolvé las siguientes inecuaciones:

a. $|2x + 4| \geq 6$

b. $\left|\frac{x}{2}x + 7\right| \geq 2$

Matemática
Ingreso 2020

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu INSTITUTO TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO