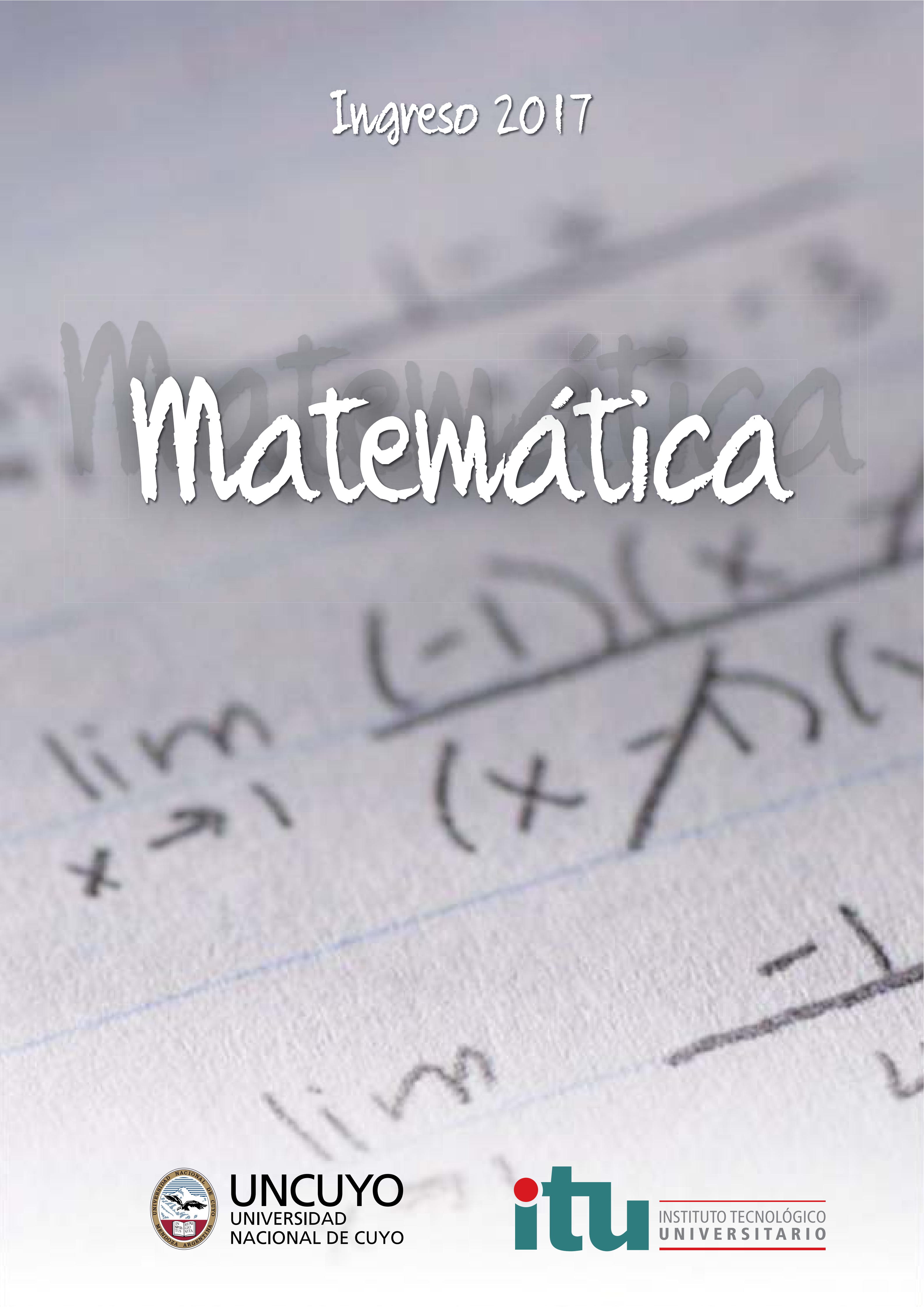
Ingreso 2017

Matemática



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Matemática

Equipo de producción de materiales de Matemática
Prof. Norma Castellino
Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño de cubierta e interior
D.G. Noelia Díaz Puppato
D.G. Eduardo A. Lentini

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu INSTITUTO TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO

MÓDULO 2

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Factorización de polinomios. Problemas de Aplicación

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

- Encontrar las raíces reales de las funciones polinómicas
- Resolver operaciones con polinomios
- Hallar cociente y resto en divisiones aplicando Regla de Ruffini y Teorema del Resto
- Aplicar convenientemente casos de factorización
- Reconocer en la forma factorizada las raíces y dividendo del polinomio

El Álgebra es una invención de los árabes que introdujeron en la península Ibérica en el siglo XII. En el Siglo XIII en Toledo el príncipe Alfonso X "El Sabio" creó la Escuela de Traductores donde las ciencias griega y árabe se esparcieron por toda Europa. El principal tratado de Álgebra del siglo XIII se debe a un italiano, Fibonacci (a quien mencionamos en el módulo de numeración ya que, entre otras cosas, introdujo la barra horizontal para anotar los números racionales), influido por la cultura árabe.

En el Renacimiento, siglo XVI, se destacaron como algebristas, Cardano (italiano) y Vietta (francés). Este último fue el que representó números arbitrarios por letras en las ecuaciones y fórmulas algebraicas.

En el siglo XVII, el progreso del álgebra sirvió a Descartes para combinarla con la geometría creando una herramienta matemática poderosa: la Geometría Analítica con la que se pudo resolver algunos problemas geométricos planteados por los griegos en el siglo III a.C .

Historia de la Matemática de J. Rey Pastor y J. Babini

2. El lenguaje algebraico

Le presentamos la siguiente situación:

Un famoso Mentalista me dijo:
- Piensa un número.
- Añádele 15.
- Multiplica por 3 el resultado.
- A lo que salga réstale 9.
- Divide entre 3 lo que te haya quedado y luego réstale 8.
- ¿Qué resultado obtienes?

Yo le dije:
- 51

Y el Mentalista me dijo instantáneamente
- El número que pensaste es el 47.

No sé bien por qué, pero sospecho que era sencillo.

Transcribiendo uno a uno los pasos pedidos por el Mentalista, tenemos:

Piensa un número $\longrightarrow \boxed{x}$

Añádele 15 $\longrightarrow x+15$

Multiplica por 3 el resultado $\longrightarrow (x+15)\cdot 3 = 3x+45$

A lo que salga réstale 9 $\longrightarrow 3x+45-9 = 3x+36$

Divide entre 3 lo que te haya quedado, $\longrightarrow (3x+36):3 = x+12$

luego réstale 8 $\longrightarrow x+12-8 = \boxed{x+4}$

¡Evidentemente no adivinó gran cosa!
Cuando manejamos solamente números **Aritmética**, los signos de operaciones indican una acción cuyo resultado es siempre un número, ejemplo: $7+6=13$, sin embargo, cuando tratamos además con letras **Álgebra** estas operaciones no tienen siempre por qué realizarse, sino que se dejan indicadas ejemplo $2x+5$. Por otra parte, mientras que en el primero de los casos se llega a un resultado único, en el segundo se expresan todos los resultados posibles, según el valor que demos a **x**.
El signo igual también tiene en muchas ocasiones un significado distinto cuando trabajamos en **Aritmética** o en **Álgebra**. Así $2\cdot 6 = 6+6 = 2\cdot(4+2) = 6\cdot(1+1) = \ldots$ aquí el signo igual se utiliza para expresar de distintas formas varias operaciones que dan todas el mismo resultado, en cambio, en el caso del mentalista, si dijimos que el resultado es 51, se tiene $x+4=51$, solo es cierto para $x=47$

Para estas ocasiones se utiliza un leguaje simbólico, llamado **lenguaje algebraico**.

2.1. Definición de expresiones algebraicas

Definición

Una **expresión algebraica** es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas como sumas, diferencias, multiplicaciones, divisiones, potencias y extracción de raíces.

POR EJEMPLO

a) $2xy$	b) $\dfrac{3x+2}{x+y}$	c) $5+\sqrt[3]{x}$	d) $4x^2+3x$

2.1.1. Clasificación de las expresiones algebraicas

De acuerdo a las operaciones que se realicen sobre las variables, se puede hacer una clasificación de estas expresiones, como se muestra en el siguiente esquema:

Expresiones algebraicas

Se clasifican de acuerdo a la operación en que esté involucrada la variable en:

- **Racionales**
  - **Enteras**
    Las variables son términos o factores con exponente natural.
    POR EJEMPLO:
    - $\sqrt{5}+x^2a-x^5$
    - $4x^5+3$
  - **Fraccionarias**
    En la que alguna variable es divisor o un término con exponente entero negativo.
    POR EJEMPLO:
    - $\dfrac{3x+2}{x+y}$
    - $3x+2x^{-3}$
- **Iracionales**
  En la que alguna variable es un radicado o la base de una potencia con exponente racional no entero.
  POR EJEMPLO:
  - $5-\sqrt{x}$
  - $\sqrt{2x+1}$
  - $2x^{\frac{1}{2}}-4$

Teniendo en cuenta el esquema, clasificar cada una de las expresiones dadas en el ejemplo:

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

El estudio de expresiones algebraicas se centrará en las fraccionarias enteras.

2.2. Polinomios

Seguramente ha estudiado **polinomios**. Pero.....¿Qué son y para qué sirven los polinomios?

Le proponemos el siguiente problema para introducirnos en el tema:

El crecimiento de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes expresiones:

$$P_A(t) = \frac{5}{2}t + 30 \quad P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$$

Donde t es el tiempo expresado en semanas.
Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana ¿Tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

Para poder resolver situaciones como la planteada, nuestro estudio se centrará en las operaciones y propiedades de los polinomios

2.2.1. DEFINICIÓN DE POLINOMIO

Definición

Se llama polinomio formal en una indeterminada x sobre el conjunto de números reales, a toda expresión de la forma:

$$P(x) = \mathbf{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n son números reales y n es un número natural.

La letra x que figura en el polinomio formal recibe el nombre de **indeterminada.**

El término de la indeterminada lo utilizamos en lo que esté asociado a la definición de polinomio. Cuando utilicemos "x" en ecuaciones o realicemos otras operaciones, le daremos el nombre de variable o incógnita según corresponda.

POR EJEMPLO

$$P(x) = 3 + 4x - 3x^3$$
$$M(x) = 3x + x^2 - 2x^5$$

2.2.2. Clasificación de los polinomios

El **grado** de un polinomio formal es el **mayor exponente de la indeterminada x**

Según el número de términos que tenga el polinomio tiene una denominación:

- **Monomio** 1 término $P(x) = 3x$
- **Binomio** 2 términos $M(x) = 4 – 6x$
- **Trinomio** 3 términos $N(x) = 4 - 8x + 3x^2$
- **Cuatrinomio** 4 términos $R(x) = 2 - x^2 + 5x - 3x^3$

Para más de cuatro términos no hay nombre particular, sólo se lo denomina polinomio. Son ejemplos de monomios, su suma es no es posible reducirla porque el exponente de la indeterminada no es el mismo. La expresión encontrada se llama ***binomio***.

Vemos entonces que un polinomio es toda suma algebraica de monomios, donde cada uno de ellos recibe el nombre de términos del polinomio.

El coeficiente $\boldsymbol{a_n}$ es distinto de cero y recibe el nombre de ***coeficiente*** principal.

El exponente ***n*** es el grado del polinomio, ya que es el mayor exponente que alcanza la indeterminada.

Particularmente si $\boldsymbol{a_n = 1}$, el polinomio se llama *Mónicos* normalizado.

En el siguiente esquema visualizaremos mejor los conceptos antes mencionados.

$$P(x) = \overbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}^{\boxed{\text{Términos o monomios}}}$$

Coeficientes:
a_n , a_{n-1} ....a_1 , a_0

Potencias de la indeterminada:
n , (n-1) , 3 ...0

Damos a continuación varias definiciones:

Definición

Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente, o decreciente, respecto de sus potencias.

Definición

Un polinomio de grado n es **completo** cuando contiene todos los exponentes desde cero hasta el enésimo.

En caso que el polinomio esté incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

POR EJEMPLO

$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$
Es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo, y ordenado en forma decreciente es:
$P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 0{,}5$

Definición

Un polinomio es nulo cuando todos los coeficientes del mismo son nulos, y en este caso el polinomio no tiene grado.

En símbolos es: $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$ o simplemente $P(x) = 0$

Si el polinomio es una constante $P(x) = k$ su grado es cero

Definición

Dado un polinomio P(x) cualquiera, su **opuesto** es aquel que tiene el mismo grado y cuyos coeficientes son números opuestos a los coeficientes de P(x).

Definición

Dado un polinomio P(x) cualquiera, un polinomio Q(x) es **igual** a P(x), si tiene el mismo grado y los coeficientes correspondientes son iguales

POR EJEMPLO

Si se tiene el polinomio $P(x) = -4x^4 + 3x^2 + 0{,}5$, su polinomio opuesto será:
$-P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$.

EJERCITACIÓN

1. Complete de modo que los enunciados sean verdaderos:
Si $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x - 5$, su polinomio opuesto es $-P(x) =$ ....
$P(x) + (-P(x)) =$ ....

2. Calcule a, b , c y d de modo que $P(x) = Q(x)$:
$P(x) = 5x^5 - 2x^3 + cx - d$ y $Q(x) = ax^5 + bx^3 + 4x - d$

Para analizar el comportamiento de un polinomio, a veces nos interesará ver cuál es el valor que toma al sustituir la indeterminada o variable por un valor específico, o sea por algún número real, entonces:

Definición

El **valor numérico de un polinomio** es el que se obtiene al sustituir la variable x por un número real a y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio.

También es importante conocer los **ceros o raíces** de un polinomio:

Definición

Un número a real (o complejo) es **raíz** de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$, o sea, que al evaluar el polinomio P en obtenemos por resultado 0.
En forma simbólica: $x=a$ es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(a)=0$

Importante: Solo consideraremos en este curso las raíces reales dado que se ha definido el polinomio sobre el conjunto de los números reales

POR EJEMPLO

Si $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + x$, el valor numérico del polinomio si:
$x = 1$, es $P(1) = 2$
$x = -1$, es: $P(-1) = 0$ es decir que $x = -1$ es una raíz de P

EJERCITACIÓN

1. Hallar el valor numérico del polinomio para los valores de x que se indican:

a) $x = -1$, $P(-1) =$…… **b)** $x = 2$, $P(2) =$…… **c)** $x = 0$, $P(0) =$……

2. En los siguientes polinomios, indique : grado, coeficiente principal, término independiente y además complételos y ordénelos en forma creciente.

a) $T(x) = \frac{3}{2}x^4 - 5x^2 - 2x$

b) $P(x) = -3x^3 - \sqrt{3}x + x^2 - 1$

2.2.3. OPERACIONES CON POLINOMIOS

2.2.3.1. SUMA DE POLINOMIOS

Definición

Dados dos polinomios y, su suma es otro polinomio cuyos términos son la suma de los términos semejantes de los polinomios sumados.

El grado del polinomio suma S (x) es menor o igual que el grado de los polinomios sumandos.

Para sumar dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes y se suman sus coeficientes. Observe además que dos polinomios siempre se pueden escribir en forma equivalente de modo que todos los términos de uno tengan un semejante en el otro.

POR EJEMPLO

Dados $P(x) = 2x^2 - 3$ y $Q(x) = x$, pueden reescribirse como:

$$P(x) = 2x^2 + 0x - 3 \text{ y } Q(x) = 0x^2 + x + 0$$

Así, son equivalentes a los dados y cada uno tiene términos semejantes en el otro.

2.2.3.2. PROPIEDADES DE LA SUMA DE POLINOMIOS

Sean P(x), Q(x) y R(x) polinomios cualesquiera en una variable, se verifican las siguientes propiedades:

NOMBRE DE LA PROPIEDAD	PROPIEDAD	
Asociativa	$[P(x)+Q(x)]+R(x) = P(x)+[Q(x)+R(x)]$	Esta propiedad nos permite sumar tres o más polinomios entre sí.
Conmutativa	$P(x)+Q(x) = Q(x)+P(x)$	Esta propiedad nos permite sumar polinomios sin tener que preocuparnos por el orden de los mismos.
Elemento neutro	$P(x)+0(x) = 0(x)+P(x) = P(x)$	Si a cualquier polinomio se le suma 0(x), el resultado es ese mismo polinomio.
Elemento inverso	$P(x)+[-P(x)] = -P(x)+P(x) = 0(x)$	Para cada polinomio siempre se puede encontrar otro polinomio (su opuesto), de modo que sumados dan 0(x).

La suma de polinomios cumple las mismas propiedades que la suma de números enteros (o también, que los reales).

Para obtener el polinomio opuesto o el polinomio inverso aditivo de un polinomio dado, basta con cambiar el signo de cada uno de sus términos.

EJERCITACIÓN

1. Marque con una cruz la respuesta correcta. Si $R(x) = 3x^3 - 2x - 1$ y $S(x) = x - 1$, entonces $R(x) + S(x)$ es igual a:

a) $R(x) + S(x) = 3x^3 - 2$

b) $R(x) + S(x) = x^3 - 3$

c) $R(x) + S(x) = 3x^3 - x - 2$

d) ninguna respuesta es correcta

2.2.3.3. RESTA DE POLINOMIOS

Definición

La resta de dos polinomios es otro polinomio obtenido sumándole al polinomio minuendo el polinomio opuesto al sustraendo: $P(x) - Q(x) = P(x) + [- Q(x)]$

2.2.3.4. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Se verán tres casos:

1. La multiplicación de un número por un polinomio es otro polinomio obtenido multiplicando cada coeficiente del polinomio por el número dado.

POR EJEMPLO

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por 5, se obtiene

$$R(x) = 5 \cdot P(x)$$
$$R(x) = 5 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$$
$$R(x) = 10x^3 - 15x^2 + 20x - 10$$

2. La multiplicación de un monomio por un polinomio da un polinomio obtenido multiplicando el monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

POR EJEMPLO

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por , se obtiene $Q(x) = \frac{3}{2}x^2$

$$R(x) = Q(x) \cdot P(x)$$
$$R(x) = \frac{3}{2}x^2 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right) = \frac{3}{2}2\,x^2x^3 + \frac{3}{2}(-3)\,x^2x^2 + \frac{3}{2}4x^2x + \frac{3}{2}(-2)x^2$$
$$R(x) = 3x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - 3x^2$$

3. La multiplicación de polinomios da otro polinomio obtenido multiplicando cada monomio que forma el primer polinomio por el segundo polinomio

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores

POR EJEMPLO

Realicemos el producto entre $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 11$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4$:

$P(x) . Q(x) = (3x^4 - 5x^2 + 11)\ (x^3 + 2x^2 + 4)$

$$= 3x^4x^3 + 3 \cdot 2x^4x^2 + 3x^4 4 - 5x^2x^3 + (-5)\,2x^2x^2 - 5 \cdot 4x^2 + 11x^3 + 11 \cdot 2x^2 + 11 \cdot 4$$

$$= 3x^7 + 6x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 11x^3 + 2x^2 + 44$$

La multiplicación de los polinomios dados lo hemos realizado en forma horizontal. También la podemos efectuar colocando los polinomios en columna, alineando los términos semejantes del siguiente modo:

$$3x^4 - 5x^2 + 11$$

MULTIPLICAMOS

$$x^3 + 2x^2 + 4$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 12x^4 & & -20x^2 + 44 \\
 & 6x^6 & & -10x^4 & & +22x^2 \\
3x^7 & & -5x^5 & & +11x^3 & \\
\hline
\mathbf{3x^7} & \mathbf{+6x^6} & \mathbf{-5x^5} & \mathbf{+2x^4} & \mathbf{+11x^3} & \mathbf{+2x^2+44}
\end{array}$$

2.2.3.5. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

NOMBRE DE LA PROPIEDAD	PROPIEDAD	
Asociativa	$[P(x) . Q(x)] . R(x) = P(x) . [Q(x) . R(x)]$	Cuando se multiplican tres polinomios, no importa cuál de los productos se realice primero, el polinomio resultante es el mismo
Conmutativa	$P(x) . Q(x) = Q(x) . P(x)$	También en el producto de polinomios, el orden de los factores no altera el polinomio resultante obtenido.
Elemento neutro	$P(x) . 1(x) = 1(x) . P(x) = P(x)$	Si se multiplica cualquier polinomio por 1(x) se obtiene ese mismo polinomio
Elemento absorbente	$P(x) . 0(x) = 0(x) . P(x) = 0(x)$	Multiplicando cualquier polinomio por el nulo, se obtiene nuevamente el polinomio nulo.

La siguiente propiedad, que se cumple para cualquier terna de polinomios P(x) , Q(x) y R(x) involucra a la suma y al producto de ellos:

DISTRIBUTIVA	$P(x) \,.\, [Q(x) + R(x)] = P(x) \,.\, Q(x) + P(x) \,.\, R(x)$

Observe que las operaciones suma y producto de polinomios cumplen las mismas propiedades que la suma y producto de números enteros.

Productos de interés práctico o también llamados productos notables

Existen algunos productos que tienen una estructura determinada, y algunos autores lo llaman "productos notables". Además, se usarán con mucha frecuencia y por eso es conveniente tenerlos presente.

Para comprobar los resultados realice las multiplicaciones correspondientes.

$$(x+a)\,(x-a) = x^2 - a^2 \quad \Big\} \text{ Diferencia de cuadrados}$$

$$\left.\begin{aligned} (x+a)\,(x+a) &= (x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 \\ (x-a)\,(x-a) &= (x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2 \end{aligned}\right\} \text{ Trinomio cuadrado perfecto}$$

$$(x-a)\,(x-a)\,(x-a) = (x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 \quad \Big\} \text{ Cuatrinomio cubo perfecto}$$

2.2.3.6. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

No siempre es posible dividir polinomios y encontrar otro polinomio. Esto sólo se logra bajo ciertas condiciones.

Se llama división entera de un polinomio P(x) de grado m entre otro Q(x) de grado n, con $m \geq n$, al algoritmo por el cual se obtienen otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplen:

P(x) = Q(x) . C(x) + R(x) **(1)**
Grado de C(x) = m - n y grado de R(x) ≤ n - 1 ó R(x) tiene grado 0

$$\underbrace{P(x)}_{\textbf{DIVIDENDO}} = \underbrace{Q(x)}_{\textbf{DIVISOR}} \,.\, \underbrace{C(x)}_{\textbf{COCIENTE}} + \underbrace{R(x)}_{\textbf{RESTO}}$$

A la expresión (1) se la llama **algoritmo de la división.**

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben tener presente este conjunto de instrucciones:

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben tener presente este conjunto de instrucciones:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el del polinomio divisor.
- Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente y se completan antes de comenzar a dividir.
- El grado del resto debe ser menor que el del divisor o ser el polinomio nulo.

A continuación describimos el proceso de la división

POR EJEMPLO

$$(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$$

I. Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente:

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

II. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor:

$$3x^2 (x^2 - 3x + 2) = 3x^4 - 9x^3 + 6x^2$$

III. El polinomio obtenido se resta del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) - (3x^4 - 9x^3 + 6x^2) = 14x^3 - 6x^2 - 2x + 3$$

Observe que el polinomio obtenido luego a aplicar una iteración del algoritmo tiene al menos un grado menos que el divisor.

IV. Con el dividendo obtenido, se repiten las operaciones de los pasos I, II y III hasta obtener un resto igual a cero o de menor grado que el del divisor

El desarrollo completo del algoritmo es:

$$
\begin{array}{rl|l}
3x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 2x & + 3 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{3-3}
-3x^4 + 9x^3 - 6x^2 & & 3x^2 + 14x + 36 \longrightarrow \boxed{\text{Cociente: } C(x)} \\ \cline{1-1}
14x^3 - 6x^2 - 2x & & \\
-14x^3 + 42x^2 - 28x & & \\ \cline{1-1}
36x^2 - 30x + 3 & & \\
-36x^2 + 108x - 72 & & \\ \cline{1-1}
78x - 69 & &
\end{array}
$$

$78x - 69 \longrightarrow$ Ya no se puede seguir dividiendo por que el grado del resto, R(x) , es menor que el grado del divisor.

Luego, el cociente de los polinomios dados es posible expresarlo:

a) Teniendo en cuenta el algoritmo de la división: $P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$

$$P(x) = (x^2 - 3x^2 + 2)\,(3x^2 + 14x + 36) + (78x - 69)$$

b) O también $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4 + 5x^3 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 3x^2 + 14x + 36 + \frac{78x - 69}{x^2 - 3x + 2}$$

- Si el resto es distinto de cero, la división se llama entera y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$$

- Si el resto es cero, **la división se llama exacta**, es decir, el dividendo es un múltiplo del divisor y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x)$$

Si la división es exacta, las siguientes expresiones son equivalentes:
- El dividendo es múltiplo del divisor o el dividendo es divisible por el divisor.
- El dividendo es múltiplo del cociente o el dividendo es divisible por el cociente.
- El dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente.

Si se quiere obtener $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x + 2)$ es decir dividir por un polinomio completo de grado uno, mónico o normalizado (con coeficiente principal uno) podemos afirmar:

- *siempre el cociente es otro polinomio de un grado menos (por lo menos) que el divisor*
- *el resto es un polinomio de grado 0, o el polinomio nulo.*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = x - r$

$$\text{Entonces } C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad \begin{cases} R(x) = 0 \text{ para división exacta} \\ R(x) = d \text{ para división entera} \end{cases}$$

2.2.3.7. REGLA DE RUFFINI – TEOREMA DEL RESTO

Estas observaciones tuvo en cuenta Paolo Ruffini en 1809 y propuso un método más sencillo para realizar este tipo de divisiones, sin escribir en el procedimiento los factores literales de cada término. Este método se conoce como **Regla de Ruffini.**

Para dividir: $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x + 2)$ aplicando la Regla de Ruffini, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Completar el polinomio dividendo.
2. Colocar en un renglón solamente los coeficientes del polinomio dividendo ordenado en forma decreciente.
3. En el renglón que sigue, el – 2 (*r* en general, que es la raíz del polinomio divisor).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\ -2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

4. Repetir el primer coeficiente en la primera posición del tercer renglón.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\ -2 & \downarrow & & & & \\ \hline & 5 & & & & \end{array}$$

5. Se lo multiplica por la raíz del divisor (2do renglón) y el resultado se coloca en el 2do renglón, bajo el segundo coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\ -2 & \downarrow & -10 & & & \\ \hline & 5 & & & & \end{array}$$

6. Se realiza la suma indicada verticalmente, colocando el resultado en el tercer renglón.

SUMAR

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\ -2 & & -10 & & & \\ \hline & 5 & -13 & & & \end{array}$$

7. Se repiten los pasos (5) y (6) con los coeficientes que siguen hasta el coeficiente independiente del divisor.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\ -2 & & -10 & 26 & -64 & 128 \\ \hline & 5 & -13 & 32 & -64 & \boxed{\mathbf{122}} \dashrightarrow \text{RESTO} \end{array}$$

8. Los coeficientes hallados, en ese orden, son los coeficientes del polinomio cociente. El último de ellos es el resto de la división.

$$C(x) = 5x^3 - 13x^2 + 32x - 64 \text{ y } R = 122$$

Si se realiza la división de $P(x) = x^4 - 8x^2 - 7x + 2$ por $Q(x) = x - 3$, se puede hacer usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -8 & -7 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -4 & \boxed{\mathbf{-10}} \dashrightarrow \text{RESTO} \end{array}$$

El polinomio cociente es: $C(x) = x^3 + 3x^2 + x - 4$ y $R = -10$

Además si se evalúa el polinomio P (x) en $x = 3$, se tiene:

$P(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 =$

$= 81 - 72 - 21 + 2 = -10$

Esta coincidencia entre el valor del polinomio P(x) en $x = 3$ y el resto de la división **no** es casual, de hecho se puede probar que para cualquier división de este tipo será así. Esta propiedad general se enuncia en el siguiente teorema.

Definición

Teorema del resto:
el resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma x - a coincide con el valor numérico de P(x) en x =a es decir con P (a)

Este teorema es útil para conocer cuál es el resto de la división sin necesidad de realizarla.

EJERCITACIÓN

1. Resuelva las divisiones que siguen. Exprese el cociente y el resto. Cuando sea posible, aplique el teorema del resto para verificar:

a) $(x^4 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$ **b)** $(8x^4 - x^3 - 2 + x^2) : (x - 2)$

2. Encuentra el cociente y resto aplicando regla de Ruffini:

a) $(4x^4 - 3x^2 - 1) : (x - 1)$

b) $(4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1) : (x + 2)$

3. Completar:

a) Si $P(1) = 3$ $P(x) = 3x^4 + ax^3 -4x^2 - 3x + 2$ entonces a vale.................................

b) Si $x = -1$ es raíz de $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + K$ el valor de k es ....

c) Si de la división exacta entre $2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 17x + 3$ y un cierto polinomio, el cociente es *2x - 3* dicho polinomio es...

d) El polinomio que dividido por $x - 2$ tiene cociente $C(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 2$ y resto $R(x) = 3$,es...

4. Dado $Q(x) = x^6 - 64$, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El binomio $P(x) = x^3 + 8$ es divisor de Q(x).

b) - 2 es raíz de Q(x).

2.2.4. FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

Recordemos que…
es posible expresar los números enteros como producto de otros números enteros que son divisores del mismo, como por ejemplo:

- *6 = 2.3 o también 6= -2.(-3)*
- *-10= 2. (-5) o también -10 = -2. 5*

También los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos. A este proceso se lo llama **factorización.**

Anteriormente vimos productos notables, en virtud de eso:

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

Aquí, el segundo miembro de la igualdad es un producto de dos factores, mientras que el primero es un binomio. Se dice que **factorizamos** el binomio, porque ese binomio tiene como expresión equivalente un producto.

Para factorizar polinomios, en general, se aplican diversos recursos algebraicos como el de los productos notables y/o el de las raíces o ceros de un polinomio.

En este curso se abordará:

1) Factorización de polinomios a partir del cálculo de los ceros o raíces.
2) Factorización de polinomios aplicando casos de factoreo , a partir de la factorización obtención de raíces y divisores

2.2.4.1. RAÍCES Y DIVISORES

1) Factorización de polinomios a partir del cálculo de los ceros o raíces.
Anteriormente hemos visto que un número a (real o complejo) es una raíz o cero de un polinomio *P(x)* , si el valor del polinomio se anula para ese valor de *x*.

En forma simbólica teníamos: $\boxed{x=a \text{ es raíz de } P(x) \text{ si y sólo si } P(a) = 0}$

Si combinamos el teorema del resto y el algoritmo de la división de un polinomio P(x) por un binomio de la forma (x –a) :

$$P(x) = (x - a).C(x) + P(a)$$

Si P(a) = 0 entonces, una consecuencia importante estará dada por la expresión:

$$P(x) = (x - a).C(x) \qquad (2)$$

De la igualdad (2) extraemos dos conceptos importantes del álgebra operacional que son:

- Expresión factorizada de un polinomio.
- Divisibilidad de polinomio

El polinomio dividendo queda expresado como el producto del divisor por el cociente, o también podemos decir que hemos factorizado P(x) a partir del producto del divisor (x- a) por el cociente C (x)

A la expresión: P(x) = (x - a).C(x) también podemos escribirla así:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} = C(x)$$ y se lee: es divisible por (x - a).

Cuando decimos **es divisible por**, esta expresión nos asegura que el <u>resto de esa división es cero</u>.

Concluimos entonces que:
Si al realizar el cociente entre dos polinomios, obtenemos: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$ y el resto es cero, entonces P(x) es divisible por Q(x)

Este concepto matemático que se vio, en los números enteros se llama:
Divisibilidad

La divisibilidad es una herramienta que nos será útil para factorizar polinomios.

Conocer las raíces de un polinomio nos permiten expresarlo en forma factorizada

Veremos también durante el curso que el conocimiento de las raíces nos permitirá

- Simplificar expresiones algebraicas.
- Resolver ecuaciones cuyo grado es mayor o igual que 2.
- Graficar una función, porque dichos valores son los valores de "x" para los cuales la gráfica de la función dada interseca el eje de las abscisas

Cabe preguntarnos:

¿Cuántas raíces tiene un polinomio?
Esta pregunta la contesta un teorema, cuya demostración necesita de conocimientos matemáticos más avanzados, que se llama:

2.2.4.1.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Definición

Todo polinomio de grado **n** tiene **n** raíces (números reales o complejos, iguales o distintas).

Si de un polinomio de grado *n*, conocemos sus *n* raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podemos expresar el polinomio en forma factorizada, recordemos que an es el coeficiente principal

$$\boxed{P(x) = a_n\,(x - x_1)\,(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)}$$

Se aplica este teorema en un ejemplo. Para ello, tendrá que completar lo que se pide:
Sea el polinomio: $P(x) = ax^4 + b\,x + c$

a) El grado del polinomio es: ....
b) De acuerdo al teorema fundamental del álgebra tiene….. ceros o raíces que simbólicamente indicamos: .... , ..…, ….., ….
c) El coeficiente del término principal es $a_n =$ …..

Entonces, la expresión factorizada del polinomio, a partir del coeficiente del término principal y las raíces es: $P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\,(x - x_4)$

Analicemos este ejemplo, en el que también tendrá que completar algunas cosas:
Siendo $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ un polinomio de grado ……, de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra, tendrá …….. raíces .

Si sabemos que una de sus raíces es: $x_1 = 2$, esto quiere decir que P(x) es divisible por (x - 2) . Para calcular el cociente, podemos aplicar la regla de Ruffini.
Complete el cuadro y calcule los coeficientes:

	......	......	......	......	......
......		......	......	......	......
	......	......	......	......	......

El último valor que calculó, aplicando Ruffini es cero, de no ser así revise nuevamente. Si llegó a cero, entonces el polinomio cociente es: C(x)=………………….. y R(x)…….

De esta forma, queda expresado el polinomio P (x) como el producto del divisor por el cociente del siguiente modo: $P(x) = (x - 2)(x^2 + 5x + 6)$

Al llegar a este paso decimos que P(x) es divisible por:

- $(x - 2)$ y también por
- $x^2 + 5x + 6$

Para encontrar las raíces restantes, es decir los valores de x que anulan al polinomio C(x), se tiene que volver a calcular las raíces del cociente obtenido: $C(x) = x^2 + 5x + 6$

Calcular los ceros, significa igualar a cero este polinomio, $x^2 + 5x + 6 = 0$
Obteniendo una ecuación de 2º grado completa cuyas raíces se calculan a partir de los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo cada coeficientes por su valor: a = 1, b= 5 y c = 6 se obtiene:
$x_2 = -2$ y $x_3 = -3$

Así, la factorización del polinomio C(x) queda: $C(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.
Teniendo en cuenta la raíz anterior $x^1 = 2$, expresamos la factorización del polinomio P(x) del siguiente modo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 1\,(x - 2)(x + 2)(x + 3)$$

Concluimos que este polinomio es divisible por: $(x - 2)$, $(x + 2)$ y $(x + 3)$.

IMPORTANTE: Si consideremos solo las raíces reales, debemos tener en cuenta que las raíces complejas son dos, dado que son complejas conjugadas. Si el polinomio es de grado impar, por ejemplo 3, puede tener tres raíces reales o una dado que las otra dos pueden ser complejas. Esto nos permite afirmar que un polinomio de grado impar **"tiene por lo menos una raíz real"**
Si el grado del polinomio es par, por ejemplo 4, puede tener: 4 raíces reales, dos raíces reales o ninguna (esto se debe a que las complejas vienen de a pares).

EJERCITACIÓN

a) Escriba la expresión factorizada de un polinomio de grado 5 cuyo coeficiente principal es 2 y sus raíces son: $x1 = x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$ y $x_5 = 1$.

b) A partir de la expresión factorizada que encontró, escriba el polinomio correspondiente: ……………………………………………….

La otra pregunta que surge naturalmente es:
¿Cómo se pueden hallar las raíces reales de un polinomio?

Una forma es proponer valores para x, reemplazarlos en P(x) hasta obtener un resultado nulo, este proceso puede ser muy largo.
Hay un teorema que acota los valores entre los que se debe probar para ver si se verifica el teorema del resto, cabe destacar que no siempre no da un resultado, dado que depende de la naturaleza de la raíz.

2.2.4.1.2. TEOREMA DE GAUSS

Definición

Dado un polinomio de coeficientes enteros, si el número racional r es una raíz del polinomio, $r = \frac{p}{q}$ con p y q enteros y $q \neq 0$, siendo $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible, entonces p divide al coeficiente independiente a_0 y q divide al coeficiente principal a_n

Nota: Es importante interpretar que el teorema asegura que si r es una raíz racional del polinomio debe verificar las condiciones del teorema, pero no todo número racional que cumpla las condiciones es raíz del polinomio. ***Este teorema solo permite hallar las raíces racionales***

La aplicación de este teorema se simplifica si normalizamos el polinomio $a_n = 1$ y consideramos solo el término independiente.

POR EJEMPLO

Factorizar $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Se aplica el teorema de Gauss. Las raíces se buscan entre los divisores del término independiente -6 que son: -6; 6; -3; 3; -2; 2;-1; 1

Si x=1 es uno de los divisores y P(1) = 0 por lo visto anteriormente, se sabe x-1 es un divisor de P(x).

Aplicando regla de Ruffini queda: $P(x) = (x-1)(x^2-5x + 6)$
En el segundo miembro, queda el factor (x^2-5x+6) para expresarlo como producto de factores primos. Se resuelve la ecuación cuadrática $x^2-5x+6= 0$
Cuyas soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Reemplazando queda:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-3)(x-2)$$

2) Factorización de polinomios aplicando casos de factoreo, a partir de la factorización obtención de raíces y divisores

Repasaremos algunos conceptos previos antes de abordar el tema

Polinomios Primos

> *Recordamos que:*
> *Al número 60 lo podemos escribir:*
> *60 = 2.2. 3.5 = 4 . 3. 5*
> *Lo hemos expresado como producto de los factores 2, 3 y 5, ya que 60 es divisible por ellos. Decimos que 60 es número compuesto.*
> *No sucede lo mismo con 61, ya que no es divisible por otros números que no sean él mismo y la unidad. A estos números se los llama números primos.*

Con los polinomios sucede algo parecido, es decir, algunos de ellos se pueden factorizar y otros no. Decimos entonces:

Cuando a un polinomio de grado no nulo, no es posible expresarlo como producto de polinomios de grado menor, se dice que es un polinomio primo.

Como dijimos en la introducción la *factorización de un polinomio*, conocidas sus raíces, no es la única forma de expresar un polinomio como un producto de polinomios primos. Otra forma es a partir de los casos de factoreo:

2.2.4.2. CASOS DE FACTOREO

- Factor común
- Factor común por grupos de igual número de términos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Suma o diferencia de potencias de igual grado

2.2.4.2.1. FACTOR COMÚN

Observe el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 4x^2$
Vamos a factorizarlo extrayendo los factores comunes a ambos términos.
Para ello seguimos el siguiente procedimiento que consiste en:

- Calcular el mayor divisor común de los coeficientes.
- Identificar la variable x, con el menor exponente de todos los términos.

Volviendo al polinomio $P(x) = 2x^4 + 4x^2$ observamos que:
- 2 es el mayor divisor común de los coeficientes 2 y 4
- x^2 es el factor literal con menor exponente de los términos dados

Luego, el factor común es: $2x^2$
Si dividimos cada término del polinomio por el factor común obtenemos:

$$\frac{2x^4}{2x^2} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

por lo tanto: $P(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

¿Es posible verificar si esta factorización es correcta? ¿Qué propiedad debemos utilizar? Dejamos esta inquietud para que la resuelva y verifique el resultado.

EJERCITACIÓN

1. Extraiga el o los factores comunes de:

a) $6a^4 b^3 - 4a^5 b^2 - 12a^3 b^2 + 4a^4 b^4 - 6a^3 b^3$

b) $\frac{7}{3} m^6 x^3 y + 7m^5 n x^2 + \frac{14}{5} m^2 n^3 x y$

2. Complete la tabla, teniendo en cuenta las flechas señaladas:

Busque el factor común y factorice la expresión dada:

$10x+15y$	$5(2x+3y)$
....	$4xy(ab-ac+d)$
$6xy-9xy^2+3x^2y$	$3xy$ (..............................)
....	$-7p\,(2p^3+p+1)$
$\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{8}ab^2$	$\frac{1}{2}a$ (..............................)
....	$0,2\,z\,(x+2y-3z)$

Aplique la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

2.2.4.2.2. FACTOR COMÚN POR GRUPOS

No siempre es posible factorizar un polinomio a partir del factor común. Sin embargo, hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos, asociando, con el mismo número de términos y que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

$ax + ay + bx + by = a\,(x + y) + b\,(x + y)$

Analicemos este ejemplo: $ax + ay + bx + by$ (*)
En él es posible observar que los dos primeros términos tienen de común el factor a y los dos últimos, el factor *b*. Si asociamos los dos primeros y los dos últimos términos:

$$a\,x + a\,y + b\,x + b\,y = (a\,x + a\,y) + (bx + by)$$

extraemos el factor común de cada paréntesis, obtenemos:

$$a\,x + a\,y + b\,x + b\,y = a\,(x + y) + b\,(x + y)$$

Observamos que han quedado dos términos que tienen como factor común $(x + y)$, entonces extraemos ese factor común:

$$a\,x + a\,y + b\,x + b\,y = (x + y)\,(a + b)$$

La expresión (*) de cuatro términos ha quedado factorizada como un producto de dos factores.

¿En este caso, existe una única forma de agrupar los términos?...........

Intente otra agrupación. ¿Obtiene finalmente la misma factorización?................

Recuerde:
Los polinomios que se pueden factorizar de esta forma cumplen con el siguiente requisito:

- Los grupos de términos que tienen factores comunes deben tener el mismo número de términos.

POR EJEMPLO

Analicemos el siguiente polinomio: $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1$
Para factorizarlo, podemos agrupar los dos primeros términos y los dos segundos. **¡Cuidado con el paréntesis!**
Analice en cuál de las expresiones siguientes es **incorrecto** el agrupamiento:
$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x-1)$
$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)+(-x-1)$
$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x+1)$
Seguramente coincidimos que el primero, ya que al sacar los paréntesis, la expresión que se obtiene no es equivalente a la dada.

Cometer este error es muy común. Recuerde que el signo negativo que precede un paréntesis indica que al eliminarlo, cambia el signo de los términos que encierra el mismo. Esta condición no se cumple en el primer caso. Pero para la factorización nos interesa la tercera propuesta, ya que admite sacar factor común la expresión $(x + 1)$.

Resulta entonces que:
$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x+1)$
$2x^3+2x^2-x-1=(2x^2-1)(x+1)$

Recuerde que:
- $-a - b = -(a + b)$
- $-a + b = -(a - b)$

Cuando completemos el estudio de casos de factoreo, veremos que podemos seguir factorizando la expresión obtenida.

EJERCITACIÓN

1. Factorice las siguientes expresiones:
a) $6am - 4ac - 3bm + 2bc$
b) $6x^2 + 10ax + 15x + 25a$
c) $2x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 3$

2.2.4.2.3. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

¿Recuerda el resultado de $(x + a)^2$?..

La expresión que se obtiene se denomina **trinomio cuadrado perfecto**, que factorizada, es el cuadrado de un *binomio.*

Un trinomio cuadrado perfecto consta de .... términos, que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cuadrados.

b) Un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados.

El cuadrado de un binomio es el producto del binomio por sí mismo y si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, obtenemos:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + a\,b + ba + bb = a^2 + 2a\,b + b^2$$

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}} = \underbrace{a^2 + 2a\,b + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

POR EJEMPLO

• El trinomio $25x^2 + 10xy^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:
a) El primer término es el cuadrado de 5x ya que: $(5x)^2 = 25x^2$
b) El tercer término es el cuadrado de y^2 ya que: $(y^2)^2 = y^4$
c) El segundo término es el doble producto de las bases de esos cuadrados, es decir:

$$2.5\,x\,y^2 = 10\,x\,y^2$$

Luego, el trinomio cuadrado perfecto dado se factoriza:

$$25x^2 + 10xy^2 + y^4 = (5x + y^2)^2$$

• El trinomio, $(9 - 6x + x^2)$ se puede factorizar de dos maneras:

$$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2 \quad \text{o} \quad 9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2 \quad (1)$$

Nota: Siempre que el término del doble producto aparezca con signo negativo, en el trinomio cuadrado perfecto, podemos factorizarlo de las dos maneras.

En la expresión (1) ¿Cuáles son las raíces y los divisores?

Vemos que x = 3 anula el polinomio, decimos que es una raíz con **grado de multiplicidad dos**, esto lo vemos mejor si lo expresamos como:

$$(x - 3)^2 = \overbrace{(x - 3)(x - 3)}^{\textbf{DIVISORES}}$$

RAÍCES

EJERCITACIÓN

1. Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cuadrado de un binomio

$(3x+1)^2$	....
....	x^2+6x+9
$(0{,}5a-0{,}3)^2$	....
....	$25a^2-70ab+49b^2$

Escriba el cuadrado de un binomio

2. Factorice las siguientes expresiones:

a) $x^2y^4+\frac{1}{4}-xy^2$

b) $\frac{9}{25}x^6+\frac{12}{5}x^3y^2+4y^4$

2.2.4.2.4. CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

¿Recuerda el resultado al realizar $(x + a)^3$? ....
La expresión obtenida se denomina **cuatrinomio cubo perfecto**, que factorizada es el cubo de un binomio.Un cuatrinomio cubo perfecto de la forma $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ consta de........ términos que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cubos: x^3 y a^3
b) Un tercer término $3x^2a$, es el triple del cuadrado de la base del primer término por el segundo término.
c) Un cuarto término $3xa^2$, es el triple de la base del primer término por el cuadrado de la base del segundo.

Para desarrollar el cubo de un binomio, desarrollamos primero el cuadrado y luego multiplicamos la expresión que obtuvimos por el binomio original:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a+b)$$
$$= a^3 + a^2 b + 2a^2 b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

Recuerde que: $(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

POR EJEMPLO

• El polinomio $x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 8y^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto porque:

$$x^3 = (x)^3 \qquad 6x^2 y = 3(x)^2\, 2y$$
$$8y^3 = (2y)^3 \qquad 12xy^2 = 3x(2y)^2$$

Luego este cuatrinomio cubo perfecto se factoriza: $x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$

EJERCITACIÓN

1. Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cubo de un binomio.

$(3x+1)^3$	....
....	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3$

Escriba el cubo de un binomio.

2. Factorice las siguientes expresiones:

a) $8a^3 + 36a^2 b + 54ab^2 + 27b^3$

b) $x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125}$

2.2.4.2.5. DIFERENCIA DE CUADRADOS

Complete con la expresión correspondiente: $(a+ b)(a - b) =$ ....?
Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:
$(a + b) (a - b) = a^2 - a b + b a - b^2 = a^2 - b^2$

Luego, por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\substack{\text{Producto de la suma} \\ \text{por la diferencia de las bases}}}$$

EJERCITACIÓN

1. Escriba las siguientes expresiones como producto de una suma por una diferencia:
a) $16 y^2 - x^4 =$ ....
b) $1 - m^2 4 =$ ....

2.2.4.2.6. SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS DE IGUAL GRADO

Los siguientes polinomios son particularmente binomios que presentan la siguiente expresión:

$P(x) = x^n + a^n$ ó $P(x) = x^n - a^n$ Siendo n un número natural

Para factorizarlos es de suma importancia tener presente dos propiedades vistas:

- Todo polinomio de grado *n* tiene *n* raíces (números reales o complejas, recordemos que solo nos interesan las reales).
- Si de un polinomio de grado *n* conocemos sus *n* raíces: $x_1 , x_2, x_3,.....,x_n$, (siendo el coeficiente principal a_n), podemos escribir su expresión factorizada:

$$P(x) = a_n (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3)....(x - x_n)$$

Para llevar a cabo la factorización utilizaremos dos conceptos:

- Estas expresiones son divisibles por un binomio de la forma (x - a) siempre que a sea un cero o raíz del polinomio dado. Luego: $P(x) = (x - a) C(x)$

- La regla de Ruffini para calcular los coeficientes de C(x) y verificar si efectivamente el valor hallado para a es un cero del polinomio.

Debemos averiguar si $x^n + a^n$ ó $x^n - a^n$ son divisibles por (x + a) ó (x - a).
En ambos casos, la divisibilidad depende si el exponente n (número natural) es par o impar.

Resumimos en la siguiente tabla cuales son los divisores, y lo demostraremos mediante ejemplos.

$x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si n es impar
$x^n + a^n$ no tiene divisores si n es par
$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ si n es impar
$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ y por $x + a$ si n es par

- Si se tiene suma de potencias del mismo exponente *n*, siendo *n* es impar

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = (x^3 + 3^3) : (x + 3)$$

Aplicando el teorema del resto para $x = -3$ resulta: $(-3)^3 + 3^3 = 0$ y la división es exacta.
Resolviendo la división con la regla de Ruffini, obtenemos el cociente:

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2 - 3x + 9 \qquad (1)$$

Utilizamos en la igualdad (1) el algoritmo de la división y de esta forma obtenemos la expresión factorizada

$$(x^3 + 27) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

- Si se tiene resta de potencias del mismo exponente *n*, siendo *n* es impar

$$(x^5 - 32) : (x - 2) = (x^5 - 2^5) : (x - 2)$$

Aplicando el teorema del resto para $x = 2$ resulta: $2^5 - 2^2 = 0$ y la división es exacta.
Aplicando regla de Ruffini obtenemos el cociente:

$$(x^5 - 32) : (x - 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \qquad (2)$$

Utilizamos en la igualdad (2) el algoritmo de la división. Así obtenemos:

$$(x^5 - 32) = (x - 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

- Si se tiene suma de potencias del mismo exponente *n*, siendo *n* par

$$(x^6 + 64) : (x \pm 2) = (x^6 + 2^6) : (x \pm 2)$$

Aplicando el teorema del resto:
Si $x = -2$ resulta: $(-2)^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.
Si $x = 2$ resulta: $2^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.

Conclusión:
Si se presenta una suma de dos potencias de grado par, no es divisible por la suma ni por la diferencia de las bases porque no hay un número real que anule el polinomio

- Si se tiene resta de potencias del mismo exponente n, siendo n par
    - $(x^4 - 16) : (x + 2) = (x^4 - 2^4) : (x + 2)$

Aplicando el teorema del resto para $x = -2$ resulta: $(-2)^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Usando el algoritmo de la división, se tiene $(x^4 - 16) = (x +2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

También

- $(x^4 - 16) : (x -2) = (x^4 - 2^4) : (x - 2)$

Aplicando el teorema del resto para $x = 2$ resulta: $2^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$.
Usando el algoritmo de la división, se tiene $(x^4 -16) = (x -2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

Pero en ambos casos, si se analiza el segundo factor, se verá que el proceso de factorizar no está terminado, pues el segundo factor también es factorizable por el segundo caso de factoreo:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x^3 - 2x^2) + (4x -8) = x^2 (x - 2) + 4 (x - 2) = (x^2 + 4) (x - 2)$$

Obtenemos entonces: $(x^4 - 16) = (x^2 + 4) (x - 2) (x + 2)$

Nota: Puede ocurrir que los casos de factorización aparezcan combinados:

a) $3x + 3x^2 + \frac{3}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ (factor común y trinomio cuadrado perfecto)

b) $b^3 - b + 1 - b^2 = (b^2 - 1)(b - 1)$ (factor común por grupos y diferencia de cuadrados)

Si recordamos el polinomio que vimos como ejemplo cuando aplicamos factor común por grupos $(2x^2 - 1) (x + 1)$.

Si sacamos factor común 2 nos queda: $(2x^2 - 1) = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ lo expresamos como diferencia de cuadrados

$$2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{DONDE} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ son las raíces} \\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ son divisores} \end{cases}$$

EJERCITACIÓN

1. Complete la siguiente tabla:

Escriba como el producto de la suma por la diferencia de las bases

$\frac{1}{9}x^4 - 0,25$	....
....	$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

Escriba como una diferencia de cuadrados

A continuación mencionamos los pasos generales a tener en cuenta para la factorización de polinomios:

1º Sacar factor común si es posible.
2º Si el polinomio no queda totalmente factorizado, se aplica alguno de los otros casos analizados o el método de las raíces.

Para utilizar el método de la factorización a partir de los ceros o raíces reales del polinomio tenemos en cuenta:
a) Calcular alguna raíz entera a partir de los divisores enteros del término independiente.
b) Verificar si los divisores son raíces del polinomio utilizando el teorema del resto.
c) Calcular el cociente C(x) entre P(x) y el divisor (x - a) utilizando la Regla de Ruffini, de modo que: P(x) = (x - a) C(x)
d) Se repite lo realizado en el punto c) en caso de que C(x) sea factorizable y se sigue hasta que no sea posible la factorización.

2. Obtenga la expresión factorizada de los siguientes polinomios y determine en cada caso las raíces y los divisores
a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
c) $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema de la introducción:

El crecimiento de dos poblaciones A y B, responde a las siguientes expresiones:

$$P_A(t) = \frac{5}{2}t + 30 \qquad y \qquad P_B(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$$

Donde t es el tiempo expresado en semanas.

Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana

¿Tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

Primero analizamos los datos y respondemos:

- ¿Qué significa que coincidan en $t = 4$?
- ¿Cómo se utiliza este dato?
- ¿Qué se necesita calcular para responder la pregunta?

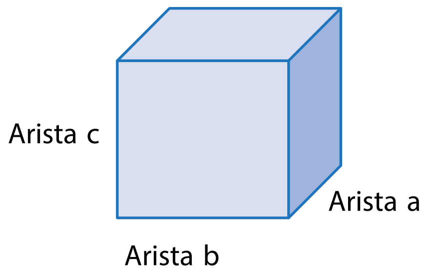
2.2.5. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

EJERCITACIÓN

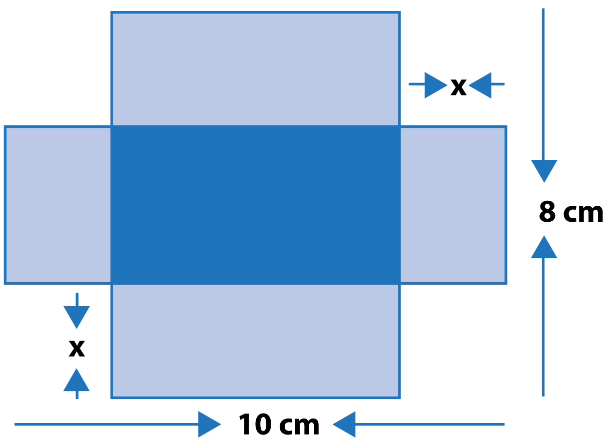
Veremos en una aplicación la importancia de la factorización de polinomios. En caso de ser necesario ayúdese con una gráfica.

a) Se estaba diseñando un programa de computación para construir cajas con forma de prisma recto de base rectangular. Por un problema con la computadora, se perdió información sobre la medida de una de las aristas, pero se recuperó la medida de las otras dos como función de la variable x; y de la expresión que me permite calcular el volumen del prisma. Cómo puede hacerse para hallar la expresión que corresponde a la forma de cálculo de la tercer arista c, si sabemos que:

$V(x) = 80x^3 + 158x^2 + 101x + 21$
Arista a $= A(x) = 2x + 1$
Arista b $= B(x) = 5x + 3$
Arista c $= C(x) = ?$



b) Con una caja de cartón de 10 cm de largo y 8 cm de ancho, se fabrican cajas sin tapa.



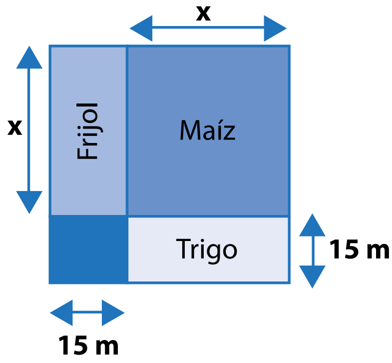
Referencia: llamamos x a la altura de la caja

1. Hallar la expresión polinómica correspondiente al volumen de la caja.
2. Si el volumen es 48 cm^3 determinar las dimensiones de la caja.

c) Se compró un terreno cuadrado, el cual se utilizó para sembrar semillas como se muestra en l siguiente figura.

1. Plantear la expresión algebraica que representa el área del terreno

2. Hallar el área correspondiente a la siembra de maíz si la del trigo es 600



2.3. Síntesis

Definición polinomio
Se llama polinomio formal en una indeterminada x sobre el conjunto de números reales a toda expresión de la forma:
$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$

Términos o monomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Coeficientes: $a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_0$

Potencias de la indeterminada: n , (n-1) , 3 ...0

Un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados en forma creciente, o decreciente, respecto de sus potencias. Si está incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$
Es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo, y ordenado en forma decreciente es:
$P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 0{,}5$

Raices
Un número a real (o complejo) es raíz de un polinomio P(a) si P(a) = 0
En forma simbólica:
x = a es raíz de P(x) $\Leftrightarrow$ P(a) = 0
Solo consideraremos en este curso las raíces reales

Si $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + x$, el valor numérico del polinomio si: x = -1, es: P(-1) = 0
x = -1 es raíz

Operaciones con polinomios

• Suma o diferencia

Dados dos polinomios P(x) y Q(x) , su suma o diferencia es otro polinomio S(x) cuyos términos son la suma o diferencia de los términos de igual grado

$S(x) = P(x) \pm Q(x)$

Dados los polinomios

$$\begin{cases} P(x) = -6x^3 + 8x^2 - x + 20 \\ Q(x) = x - 2 \end{cases}$$

$P(x) + Q(x) = -6x^3 + 8x^2 - x + 20 + x - 2$
$P(x) + Q(x) = -6x^3 + 8x^2 + 18$
$P(x) - Q(x) = -6x^3 + 8x^2 - x + 20 - (x - 2)$
$P(x) - Q(x) = -6x^3 + 8x^2 - 2x + 22$

- Multiplicación

La multiplicación de polinomios da otro polinomio obtenido multiplicando cada monomio que forma el primer polinomio por el segundo polinomio
El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores

$P(x).Q(x) = (-6x^3 + 8x^2 - x + 20).(x - 2)$
$P(x).Q(x) = -6x^4 + 20x^3 - 17x^2 + 22x - 20$

- División

Se llama división entera de un polinomio P(x) de grado m entre otro Q(x) de grado n, con $m \geq n$, **al *algoritmo* por el cual se obtienen otros dos polinomios** C(x) y R(x) **que cumplen:**

$$\mathbf{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

Grado de C(x) = m-n
grado de $R(x) \leq n-1$
ó R(x) tiene grado cero

Algoritmo de la división

$$\boxed{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

DIVIDENDO **DIVISOR** **COCIENTE** **RESTO**

$P(x) : Q(x) = (-6x^3 + 8x^2 - x + 20) :(x - 2)$

Grado 3 Grado 1

	-6	8	-1	20
2		-12	-8	-18
	-6	-4	-9	2

Raiz de Q(x)

Regla de Ruffini:
Aplicamos la regla cuando el polinomio divisor es de la forma $Q(x) = x \pm a$
Se debe completar el polinomio dividendo
Se divide por la raíz de Q(x)
El resto es un polinomio de grado cero

$C(x) = -6x^2 - 4x - 9$ $R(x) = 2$
$P(2) = -6(2)^3 + 8(2)^2 - 2 + 20 = 2$

Teorema del resto:
El resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma $x \pm a$ coincide con el valor numérico de P(x) en x = a es decir con P(a)

Si P(a) = 0 entonces, una consecuencia importante estará dada por la expresión:

$P(x) = Q(x).C(x)$
$R(x) = 0$

A la expresión anterior también podemos escribirla así: $\dfrac{P(x)}{(x-a)} = C(x)$

Se lee: P(x) es divisible por *(x-a)*

Si $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ $Q(x) = x-2$

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

R(x) = 0

Cuando decimos *"es divisible por"*
Esta expresión nos asegura que el

Resto de esa división es cero.

$P(x) = (x^2 - 2x - 3).(x-2)$

P(x) es divisible por (x-2)

$P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 2 + 6 = 0$

Casos de factoreo

• Primer caso : Factor común
Este caso se aplica cuando en todos los términos de un polinomio figura uno o varios factores repetidos.

$\underbrace{2x^2 - 4x}_{} = 2x\,(x - 2)$

x y 2 son los factores comunes

• Segundo caso : Factor común por grupos
Se aplica cuando hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos, asociando con el mismo número de términos y que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

$x^3 - x^2 + 3x - 3 = (x^3 - x^2) + (3x - 3)$
$x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2\,(x - 1) + 3\,(x - 1)$
$x^3 - x^2 + 3x - 3 = (x - 1)\,(x^2 + 3)$

• Trinomio cuadrado perfecto
a) Dos de los términos son cuadrados.
b) Un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados.

$$\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} = \underbrace{(a + b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}}$$

2(2x.3)

$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9} = 3$

• Cuatrinomio cubo perfecto
Este caso es similar al anterior, sólo que el polinomio dado debe ser un cuatrinomio y el resultado del factoreo debe ser el cubo de un binomio.

$$\underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}} = \underbrace{(a + b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}}$$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$

$\sqrt[3]{x^3} \qquad \sqrt[3]{8}$

$3(x)^2 .2 = 6x^2 \qquad 3x\,(2)^2 = 12x$

• Diferencia de cuadrados
Cada término de la diferencia del binomio es un cuadrado perfecto

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a + b)(a - b)}_{\text{Producto de la suma por la diferencia de las bases}}$$

$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

• Suma o resta de potencias de igual grado

$x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si n es impar

$x^n + a^n$ no tiene divisores si n es par

$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ si n es impar

$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ y por $x + a$ si **n es par**

$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2 + 3x + 9$

$(x^3 - 27) : (x - 3) = x^2 + 3x + 9$

$x^2 + 25$ no tiene divisores

$(x^2 - 25) : (x - 5) = x + 5$

$(x^2 - 25) : (x - 5) = x - 5$

2.4. Ejercitación para el estudiante

Contenido Conceptual:

Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Factorización de polinomios. Problemas de Aplicación

Objetivos:

- Encontrar las raíces reales de las funciones polinómicas
- Resolver operaciones con polinomios
- Hallar cociente y resto en divisiones aplicando Regla de Ruffini y Teorema del Resto
- Aplicar convenientemente casos de factorización
- Reconocer en la forma factorizada las raíces y dividendo del polinomio

Ejercicio 1:

Dados los polinomios:

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$Q(x) = 3x^3 - 2$

$R(x) = x^2 + 2x + 1$

$S(x) = x + 1$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x)$

Rta: $P(x) + Q(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + x - 1$

b) $P(x) – R(x)$

Rta: $P(x) - R(x) = x^4 + x^3 - x$

c) $Q(x). S(x)$

Rta: $Q(x) .S(x) = 3x^4 + 3x^3 - 2x - 2$

d) $R(x) : S(x)$

Rta: $R(x) : S(x) = x + 1$

Ejercicio 2:

Encuentra el cociente y resto aplicando regla de Ruffini:

a) $(8x^4 - 3x^2 - 1) : (x - 2)$

Rta: $C(x) = 8x^3 + 16x^2 + 29x + 58$ $R(x) = 115$

b) $(4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1) (x + 1)$

Rta: $C(x)= 4x^3 - 2 x^2 - 2x + 5$ $R(x) = -4$

Ejercicio 3:
Factorice hasta llegar a la mínima expresión

a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$
Rta: $P(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$

b) $P(x) = x^4 - 1$
Rta: $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

c) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
Rta: $P(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$

d) $P(x) = 4x^3 - 16x$
Rta: $P(x) = 4x(x - 2)(x + 2)$

e) $P(x) = 4x^5 + 16x^4 + 16x^3$
Rta: $P(x) = 4x^3(x + 2)^2$

f) $P(x) = 4x^4 + 1/16 - x^2$

Rta: $P(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{4}\right)^2$

g) $P(x) = -x^2 + 100$
Rta: $P(x) = (x + 10)(10 - x)$

h) $P(x) = 3x^2 - 27$
Rta: $P(x) = 3(x - 3)(x + 3)$

i) $P(x) = x^4 - 81$
Rta: $P(x) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

j) $P(x) = x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x$
Rta: $P(x) = x(x + 4)^3$

Ejercicio 4:
Determinar las raíces de los siguientes polinomios

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
Forma factorizada $f(x) = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$
Rta: Raíces $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=-2$

b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
Forma factorizada $g(x) = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$
Rta: Raíces $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=1$ raíces coincidentes