Ingreso 2017

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Autoridades de la UNCuyo

Rector
Ing. Agr. Daniel Ricardo Pizzi

Vicerrector
Dr. Prof. Jorge Horacio Barón

Secretaria Académica
Prof. Esp. Adriana García

Autoridades del ITU

Directora General
Lic. Prof. Mariana Castiglia

Secretaria de Extensión y Relaciones Institucionales
Lic. Adriana Defacci

Secretario de Administración y Finanzas
Cdor. Pedro Suso

Responsable del Área de Gestión Pedagógico-Didáctica
Lic. Prof. Eleonora Valdivieso

Directores y coordinadores

Área de Tecnologías de la Producción
Ing. José Biurriarena

Mendoza
Ing. Jorge García Guibout

Dra. Selva Rodríguez
Ing. Gloria Tutera
Lic. Diana Dominguez
AUS. Martín Silva
Ing. Alejandro Fernández

Luján de Cuyo
Mgter. Nora Metz

Rivadavia
Lic. Guillermo Barta

San Martín
Lic. Eduardo Ferrer

General Alvear
Ing. Walter López

San Rafael
Cdor. Gerardo Canales

Tunuyán
Cdor. Oscar Niemetz

Coordinación de ingreso 2017
Esp. Marianela Aveni Metz

Equipo de producción de materiales de Matemática
Prof. Norma Castellino
Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño de cubierta e interior
D.G. Noelia Díaz Puppato
D.G. Eduardo A. Lentini

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

MÓDULO 3

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

MÓDULO 3: ***ECUACIONES E INECUACIONES***

ECUACIONES E INECUACIONES

Contenidos conceptuales

Ecuaciones algebraicas de primer grado. Ecuaciones algebraicas de segundo grado. Fórmula resolvente. Inecuaciones de primer grado. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

- Plantear las ecuaciones de primer y segundo grado en casos concretos
- Encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas
- Resolver problemas planteando la inecuación correspondiente
- Interpretar las soluciones encontradas
- Expresar por medio de intervalos las inecuaciones

"De la época babilónica existe más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas. Abarcan un período que va desde el año 2100 a.C., época del famoso Rey Nabucodonosor. De esas tablillas, unas 300 se relacionan con matemáticas, unas 200 con tablas de varios tipos: de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc. Los problemas que se plantean tratan acerca de cuentas diarias, contratos, préstamos, interés simple y compuesto. En Geometría tenían conocimiento del Teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes; en Álgebra hay problemas de segundo e incluso de tercero y cuarto grado; también resolvían sistemas de ecuaciones: existe un ejemplo de un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas."

Texto extraído de: Historia e historias de Matemáticas- Mariano Perero- Grupo Editorial Iberoamérica.

En 1545 el matemático italiano Gerolamo Cardano publicó una solución algebraica para las ecuaciones de tercer grado en función de sus coeficientes y NiccoloTartaglia la desarrolló. Poco después, Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, encontró una solución para las ecuaciones de cuarto grado. En 1635 el matemático y filósofo francés René Descartes publicó un libro sobre la teoría de las ecuaciones, incluyendo su regla de los signos para saber el número de raíces positivas y negativas de una ecuación. En 1750 el matemático suizo Gabriel Cramer encontró una regla para la resolución de sistemas usando determinantes.

Contemporáneo a Cramer, el matemático francés Juan Le Rond D'Alembert, demostró que una ecuación de grado n tiene n raíces.

A continuación mostramos nuevamente el texto y luego el planteo para llegar a la respuesta:

DIOFANTO


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

En lengua vernácula	*En lenguaje algebráico*
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vellos cubriose su barbilla.	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su parde a la tierra.	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	4
Dime, caminante ¿Cuántos años vivió Diofanto?	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}$

Para terminar, responda las siguientes preguntas:

a) En el contexto del problema qué significa x.

b) ¿Qué interpretas por $\frac{x}{2}$?

c) ¿Cuál es la expresión que te indica la edad que tenía Diofanto al perder a su hijo?

d) ¿Qué te permite conocer la expresión $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$?

En la última fila hemos llegado a una ecuación,traduciendo al lenguaje algebraico una expresión verbal, para luego abordarlo matemáticamente.

3. Ecuaciones

Definición

Una ecuación es una igualdad entre expresiones que contienen uno o más valores numéricos desconocidos llamados incógnitas que se son representados por medio de letras.

Nota: Las incógnitas se representan en general por las últimas letras del alfabeto, las llamaremos x, y, z.

POR EJEMPLO

a) $3y^2 - \sqrt{2} = -\frac{y^2+1}{y}$

b) $3x + 2xy - 4 = 8$

c) $3x^3\text{-}2x = \sqrt{x} - \frac{3}{2} = 3x$

d) $4x + 1 - 4x = 4$

Observemos en este ejemplo las partes de una ecuación:

$$\overbrace{5x - 10}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{x + 6}^{\text{Segundo miembro}}$$

Términos algebraicos
o términos en “x”

Si bien existen diversos tipos de ecuaciones, como lo son las algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, particularmente nos abocaremos a las ecuaciones algebraicas en una incógnita.

3.1. ECUACIONES ALGEBRAICAS CON UNA INCÓGNITA

Definición

Las ecuaciones algebraicas, son las que resultan de efectuar a las incógnitas operaciones como: adición, sustracción, potenciación y radicación

EJEMPLOS DE ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

a) $3y^2 - \sqrt{2} = -\dfrac{y^2+1}{y}$

b) $3x^3 - 2x = 6$

c) $\sqrt{x} - \dfrac{3}{2} = 3x$

3.1.1. Clasificación de ecuaciones algebraicas con una incógnita

ECUACIONES ALGEBRAICAS EN UNA VARIABLE O INCÓGNITA

- **Racionales**
  - Enteras o polinómicas. Los exponentes de la variable o incógnita son números naturales.
    - $x^2 - 2x = -1$
  - Fraccionarias. Al menos uno de los exponentes de la variable o incógnita es un número entero negativo.
    - $\dfrac{3x}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x} = 2x^2$
- **Irracionales**
  - Al menos una de las incógnitas figura bajo el signo radical o presenta exponente fraccionario.
    - $\sqrt{2x} - 3 = \dfrac{1}{4} + x$

3.2. Ecuaciones polinómicas

Si igualamos a cero un polinomio P(x), la expresión P (x) = 0 se llama ecuación asociada al polinomio. Resolver una ecuación P(x) = 0 es hallar un conjunto de números reales (o complejos) que satisfacen esta igualdad.

Dicho conjunto se llama conjunto solución de la ecuación dada, y sus elementos se llaman raíces de la ecuación. En símbolos:

$$\textbf{a es raíz de P (x)} \Leftrightarrow \textbf{P (a) = 0}$$

Como trabajamos solo con números reales, el conjunto solución S, lo indicamos:

$$S = \{ a \in IR \,/\, P(a) = 0 \}$$

Las ecuaciones siempre se pueden igualar a cero, sus soluciones son los ceros o raíces de $P(x)$ y, según el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las no reales. Cuando la solución nos dé un complejo, diremos que **no tiene solución en el conjunto de los números reales.**

POR EJEMPLO

$3x^3 - 2x = 6$ que también puede ser escrita $3x^3 - 2x - 6 = 0$, correspondiendo a una ecuación de tercer grado en x, que presenta a los sumo tres raíces reales.

$3(t+1) - (t^2+1) = 2t$ cuya expresión equivalente, luego de operar es la siguiente ecuación de segundo grado en t, $-t^2 + t + 2 = 0$ que admite a los sumo dos raíces reales.

Cuando la solución no es inmediata recurriremos a la factorización y a las propiedades de las operaciones con números reales para encontrar las incógnitas.

3.3. ECUACIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Definición

Las ecuaciones polinómicas de primer grado (o lineales) con una incógnita tienen la forma:
a x + b = 0, siendo a y b números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a\,x + b}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax es el término lineal

b es el término independiente

3.3.1. Resolución de ecuaciones

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como las operaciones con expresiones algebraicas.

Sea la ecuación $3(x+2) - x = 0$

Aplicando distributiva de la multiplicación respecto a la adición. → $3x + 6 - x = 0$

Utilizando conmutativa de la adición. → $3x - x + 6 = 0$

Operando con los términos semejantes en x, se llega a la expresión general de la ecuación de primer grado. → $2x + 6 = 0$

Utilizando la ley uniforme, la del inverso aditivo y la del elemento neutro para que quede en el primer miembro solamente el término en x, resulta:

$$2x+6+(-6)=0+(-6)$$
$$2x+0=-6$$

Aplicando la ley uniforme , la del inverso multiplicativo y la del elemento neutro de la multiplicación queda:

$$\frac{1}{2}\cdot 2x=-6\cdot\frac{1}{2}$$
$$1\cdot x=-3$$

La solución de la ecuación es $\boxed{x=-3}$

Para verificar la solución de la ecuación:

- Se reemplaza el valor hallado para x, en la ecuación original

- Se resuelve cada miembro.

- Si el valor hallado es solución de la ecuación, se debe llegar a una identidad.

Particularmente para el ejemplo anterior resulta si x = = - 3 —> 3(-1) +3 = -3 +3 = 0

Al llegar a una identidad, se concluye que $x=-3$ es solución y el conjunto solución de la ecuación es $S=\{-3\}$.

Una ecuación lineal puede tener una, infinitas o ninguna solución.

En el siguiente cuadro vemos las condiciones para cada tipo de solución:

$a\neq 0$ y $b\neq 0$	$a=0$ y $b=0$	$a=0$ y $b\neq 0$
$x=\frac{b}{a}$	$0\cdot x=0$	$0\cdot x=b$
Presenta una única solución que la satisface.	Tiene infinitas soluciones porque para cualquier número real x se obtiene 0 = 0 que es una identidad.	Esta ecuación no tiene solución porque la igualdad obtenida NO se cumple para ningún número real x; ya que para cualquier valor de x se obtendría $0=b$ lo cual es un *absurdo*.
Ecuación determinada	**Ecuación indeterminada**	**Ecuación sin solución**

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a)
$$2x + 3 = 5$$
$$2x + 3 - 3 = 5 - 3$$
$$2x = 2$$
$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}2$$
$$x = 1$$

Una vez resuelta la ecuación, verifique que el valor obtenido es solución de ella.
La ecuación $2x + 3 = 5$ tiene **solución única $x = 1$.**

b)
$$3x - x = 2x$$
$$2x = 2x$$
$$2x - 2x = 0$$
$$0 \cdot x = 0$$

En este ejemplo observamos que hemos obtenido: $0 \cdot x = 0$
Si se reemplaza x por cualquier número real, se obtiene una identidad, o sea que la ecuación tiene **infinitas soluciones** (todos los reales son solución de ella).

c)
$$x + 5 = x$$
$$+ 5 - 5 = x - 5$$
$$x = x - 5$$
$$x - x = -5$$
$$0\,x = -5$$

Se obtiene: $0\,x = -5$
¿Cuántas soluciones tiene esta igualdad?
Cualquiera sea el valor que tome x el producto es nulo y distinto de -5.
No tiene solución.

d)
$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$
$$3\ (x+1) = 5\ (3x - 9)$$
$$3x + 3 = 15x - 45$$
$$3 + 45 = 15x - 3x$$
$$48 = 12x$$
$$x = 4$$

La solución es $x = 4$, que pertenece al conjunto de los números reales; por lo tanto esta ecuación tiene solución en R.
solución única $x = 4$

3.3.2. Aplicaciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Cuando el planteo de un problema se puede "traducir" a una ecuación, para resolverlo tiene que considerar los siguientes pasos:

1. Leer e interpretar el enunciado, para poder identificar datos e incógnita determinando las relaciones que existen entre ellos.

2. Realizar un dibujo, cuando sea posible, en el que se señalan los datos e incógnitas.

3. Escribir la ecuación que corresponda a la relación encontrada entre los datos y la incógnita. Para ello es necesario identificar cuál es la incógnita o valor desconocido en el problema y asignarle una letra cualquiera.

4. Resolver la ecuación.

5. Verificar si la solución obtenida verifica la ecuación planteada y responde a las condiciones del problema.

6. Escribir la respuesta acorde al problema.

Lo ilustramos en ejemplos de situaciones que se puedan expresar, analizar y resolver mediante una ecuaciones.

POR EJEMPLO

1. En una fábrica de aceite, se quiere enviar éste en camiones cisterna a un almacén. Los encargados del almacén solicitan que los camiones lleguen exactamente a las 17 hs Si los camiones viajaran a 80 km/h, llegarían con una hora de adelanto (a las 16hs). Pero si viajaran a 60 km/h, llegarían con una hora de retraso (a las 18hs). ¿A qué distancia está la fábrica de aceite del almacén?

A partir de los pasos para resolver un problema:

Lee e interpreta el enunciado, para poder identificar datos e incógnita y determinar las relaciones que existen entre los mismos para escribirlas en lenguaje algebraico.

"Distancia" es igual al producto de "velocidad" y "tiempo" $d = v \cdot t$

como la distancia recorrida es la misma en ambos casos podemos deducir que:
$v_1 \cdot (t - 1) = v_2 \cdot (t + 1)$

quedando planteada una ecuación donde "t" es nuestra incógnita.

$80 \cdot (t - 1) = 60 \cdot (t + 1)$ Al despejar t se tiene: $t = 7$

Para hallar respuesta al problema, reemplazamos t en cualquiera de las ecuaciones anteriores ya que d = v .t ---> d = 80 km/h . 6 hs = 60 km/h . 8 hs = 480 km

La respuesta al problema es que el almacén se encuentra a 480 km del molino.

2. A una cena de fin de año organizada por un club, asistieron 400 socios entre adultos y menores. Si el costo de la tarjeta de los adultos era de $ 35, y el de los menores $20, ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo, si en total el club recaudó $12.500?

• Si se designa con x al número de socios adultos (una de las incógnItas del problema), entonces, el número de menores será: 400 –x .

• Cada adulto pagó $35, es decir que el total pagado por ellos es: 35 x

• Cada menor pagó $20, el total abonado por ellos fue: 20 (400 - x)

• La expresión en relación a la recaudación: $35x + 20 \ (400 - x) = 12500$

• Al resolver la ecuación tenemos que $x = 300$

• Sólo resta verificar la solución e interpretarla en términos del problema:

$$35 \cdot 300 + 20\,(400 - 300) =$$
$$10500 + 2000 = 12500$$

Asistieron entonces 300 adultos y 400 - 300= 100 menores.

3. Consideremos en el problema anterior que la recaudación del club fue de $10.995. En este caso ¿Cuántos adultos y cuántos menores asistieron al festejo?

$$35x + 20 \ (400 - x) = 12500$$

La ecuación que corresponde a este nuevo enunciado es:

$35x + 20\,(400 - x) = 10995$ => $x = 199,\widehat{6}$ Número de adultos

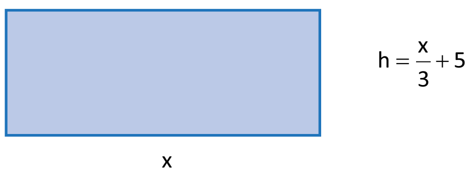
Con este valor, calculamos el número de menores que sería $x = 200,\widehat{3}$. Desde el punto de vista matemático la solución es correcta, pero carece de sentido cuando se piensa en el contexto del problema por tratarse de un número de personas.

Esto pone en evidencia dos cosas:

→ La necesidad de verificar si los resultados obtenidos son correctos desde el punto de vista matemático.

→ Comprobar si la respuesta es razonable en términos del problema planteado.

4. En un rectángulo de 42cm de perímetro la altura es 5cm mayor que un tercio de la base. ¿Cuál es la longitud de la base?



Si decimos que x es la longitud de la base, entonces la expresión de la altura en relación a la medida de la base es: $h = \frac{x}{3} + 5$.

La ecuación que permite calcular la longitud de la base teniendo presente el perímetro de la figura es:

Cuya resolución es: $\underbrace{2x}_{\text{base}} + \underbrace{2\left(\frac{x}{3} + 5\right)}_{\text{altura}} = \underbrace{42}_{\text{perímetro}}$

$$2x + 2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = 42$$

$$\left(2x + \frac{2}{3}x\right) + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 = 42$$

$$\frac{8}{3}x + 10 - 10 = 42 - 10$$

$$\frac{3}{8}.\frac{8}{3}x = 32.\frac{3}{8} \quad \text{Con lo cual } x = 12$$

Se verifica la ecuación y analiza la coherencia del valor calculado con la situación:

$$2 \cdot 12 + 2\left(\frac{12}{3} + 5\right) = 24 + 2(4 + 5) = 24 + 18 = 42$$

La respuesta del problema es: **La longitud de la base es de 12cm.**

Ahora si se puede saber la edad de Diofanto.

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

¿Cuántos años tenía?

EJERCITACIÓN

1. Expresar simbólicamente la ecuación correspondiente:

a) Un número más su quinta parte es 12.

b) Un poste tiene bajo tierra 2/7 de su longitud y la parte emergente mide 8 metros.

c) El perímetro de un cuadrado es de 12 m.

d) En una biblioteca hay 23 libros distribuidos en dos estantes, en el de abajo hay 7 libros menos que en el de arriba.

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a) $2(3x-2)-(x-3)=8$

b) $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$

c) $\frac{3}{4}\ (2x+4)=x+19$

d) $-2(x+1)+3(x-2)=x+6$

e) $\frac{5}{x+7}=\frac{3}{x-2}$

3. Marque la respuesta correcta

a) La expresión:

$\frac{13}{3}x-5\ (x+2)=\frac{4x}{3}-2(\ x+1)$ es verdadera para:

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x=-1$ d) *ningún número real* e) *todo número real*

b) El 20% de un número sumado con el doble se expresa:

a) x b) 2x c) 2,2 x d) 22x e) 220x

c) Una columna está enterrada las dos quintas partes de su longitud, las dos séptimas partes del resto está bajo agua y sobresal en 3m. ¿Cuál es la longitud de la columna?

a) 6m b) 7m c) 9m d) 9,5m e) 10m

4. Resuelve los siguientes problemas de aplicación:

a) Un comerciante hace un testamento de la siguiente forma: dos tercios a su único hijo; un quinto, a una familia muy amiga, y los 49000 restantes, a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende el total de la herencia?

b) En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si el total es de 156 personas.

c) Durante su primera hora de trabajo, el dueño de un puesto de revistas vendió la cuarta parte de los diarios que tenía y, durante la segunda hora, vendió la sexta parte de los que le quedaban. Contó los ejemplares y notó que aún había 25. ¿Cuántos diarios tenía al principio?

3.4. INECUACIONES LINEALES

Veamos los siguientes ejemplos

> **a)** Importante empresa Metalúrgica seleccionará ingeniero Mecánico o Electromecánico:
> Disponibilidad horaria
> Edad: 25 a 35 años
> **b)** El número de personas presentes sobrepasa los 1000.

¿De qué manera podemos expresar los enunciados anteriores en forma algebraica?

En estos casos, las expresiones no pueden ser traducidas al lenguaje algebraico a través de una igualdad, sino que dan lugar a una **desigualdad**.

Estas expresiones algebraicas, se llaman **inecuaciones**.

Para los ejemplos anteriores tenemos:

a) si designamos con la letra "e" a la edad, en lenguaje algebraico:

$$25 \leq e \leq 35$$

b) Si designamos con "n" al número de personas, en lenguaje algebraico:

$$n \geq 1000$$

Definición

> **Una inecuación lineal es una desigualdad que se puede escribir:**
>
> $ax + b < c \qquad ax + b \leq c \qquad ax + b > c \qquad ax + b \geq c$
>
> **donde a, b y c son números reales con a ≠ 0**

$$\underbrace{a\,x + b}_{\text{Primer miembro}} < \underbrace{c}_{\text{Segundo miembro}}$$

Al igual que para una ecuación, *resolver* una inecuación también es hallar los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Este conjunto de valores que la verifican se llama **conjunto solución.**

3.4.1. Propiedades de las desigualdades

a) Si en ambos miembros de una desigualdad sumamos o restamos un mismo número, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido
En símbolos:

$$a < b \Rightarrow a.c < b.c$$

POR EJEMPLO

$$3 < 8 \Rightarrow 3+2 < 8+2$$

b) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número positivo, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c < b.c \quad$ si $c > 0$
$a < b \Rightarrow a : c < b : c \quad$ si $c > 0$

POR EJEMPLO

$$11 > 9 \Rightarrow 11.4 > 9.4 \qquad 44 > 36$$

c) Si en ambos miembros de una desigualdad multiplicamos o dividimos por un mismo número negativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido.

En símbolos:

$a < b \Rightarrow a.c > b.c \quad$ si $c < 0$
$a < b \Rightarrow a : c > b : c \quad$ si $c < 0$

Si $4 < 12$ $\frac{4}{(-2)} > \frac{12}{(\ -2)}$ ó $-2 > -6$ si multiplicamos miembro a miembro por (-1)

cambia el sentido de la desigualdad y nos queda $2 < 6$
Estas propiedades también se extienden a las relaciones $\geq$ o $\leq$.

Veremos ahora como se aplicar estas propiedades para resolver una inecuación.

3.4.2. Resolución y representación del conjunto solución

POR EJEMPLO

Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x-3 > 0$. Trabajamos como si se tratara de una igualdad y despejamos x

$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ Hemos obtenido el conjunto solución:

$$S = \{x : x \in R \ , \ x > 3/2\}$$

Gráficamente:

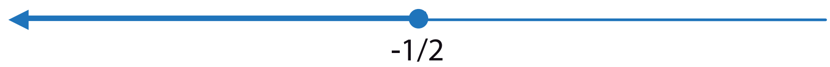
Otra forma de expresar el conjunto solución es usando la notación de **intervalo**:
S =]3/2 , ∞ [

b) $-2x + 5 \geq 6$

$-2x \geq 6 - 5$

$-2x \geq 1 \Rightarrow -x \geq \frac{1}{2}$ multiplicamos ambos miembros por (-1) $\Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

Gráficamente:



Como intervalo: $S =]-\infty, -1/2]$

Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

POR EJEMPLO

Una furgoneta pesa 875 kg. La capacidad máxima de carga, teniendo en cuenta su peso no puede superar 1.315 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

Primero traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta + peso de 4 cajones menor o igual que 1.315 kg

$$875 + 4x \leq 1315$$

Al resolver la inecuación se obtiene la inecuación: $x \leq 110$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 110 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo]0, 110].

EJERCITACIÓN

1. Resuelve las siguientes inecuaciones, representa el conjunto solución en la recta real y exprésalo como intervalo:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$

b) $5 + 3x \leq 4 - x$

c) $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$

d) $x + 8 \leq 3x + 1$

2. Resuelve los siguientes problemas de aplicación

a) Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7 cm. ¿Qué se puede decir de su perímetro p?

b) Dados los siguientes segmentos A y B, cuyas longitudes son:

long A = 2x-1 A

long B = x +1 B

Comparando ambas longitudes ¿Qué valores puede tomar x?

3.5. ECUACIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Definición

Las **ecuaciones polinómicas de segundo grado** (o cuadráticas) con una incógnita tienen la forma:
$a x^2 + b x + c = 0$, siendo a, b y c números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a x^2 + bx}^{\text{Primer miembro}} + \overbrace{c = 0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax^2 es el término cuadrático, y a su coeficiente

b x es el término lineal y b su coeficiente

c es el término independiente

Para resolver una ecuación cuadrática con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como factorización.

Observación: Dado que toda ecuación de este tipo se puede igualar a cero, hallar la solución de una de ellas es lo mismo que hallar las raíces de un polinomio de segundo grado.

POR EJEMPLO

Son ecuaciones de segundo grado:

- $x^2 + 16 = 0$
- $3x^2 - 48 = 0$
- $x^2 - 7x = 18$
- $9x^2 - 6x = -1$

Surge entonces la pregunta: *¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado?*

3.5.1. Resolución

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ (o *raíces* de un polinomio de segundo grado) pueden obtenerse a partir de los coeficientes a, b, c con la siguiente expresión:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

> **Importante:** Si uno de los términos no aparece en la ecuación es porque su coeficiente es nulo, en ese caso conviene completar la ecuación para aplicar la fórmula

POR EJEMPLO

Resolvemos las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2.1}$$

o sea $\quad x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

Con esto se tiene $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

En este caso las dos soluciones son números *reales distintos.*

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2.9}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = -\frac{1}{3}$$

Es decir que: $x_1 = x_2 = -3$

Aquí se ve que algunas ecuaciones tienen como soluciones *números reales iguales*, se dice entonces que es una *raíz doble.*

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2.1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

Obteniendo $x_1 = 1 + 2i$ y $x_2 = 1 - 2i$

En este caso vemos que las soluciones son números *complejos conjugados.*

> La ecuación del ejemplo c) NO TIENE SOLUCIÓN en el conjunto de los números reales.

Para determinar el tipo de solución, también llamado naturaleza de las raíces, basta con analizar el radicando de la fórmula de resolución. Éste recibe el nombre de *discriminante*, y se nombra con la letra griega delta Δ:

• Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces son reales distintas.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces son reales y coincidentes.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces son complejas conjugadas.

Podemos inferir un concepto muy importante:
de acuerdo al signo del discriminante,
es el tipo de soluciones que presenta una ecuación cuadrática.

EJERCITACIÓN

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 9 = 0$

b) $8x^2 + 16x = 0$

c) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$

d) $(x+1)^2 = 9$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones y clasifique sus raíces.

a) $2x^2 - 8x - 10 = 0$

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

3. Resuelve los siguientes problemas de aplicación:

• **a)** Calcule las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 405 cm^2 y su perímetro 84 cm.
• **b)** Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida, en cm, tres números pares consecutivos. Halle los valores de dichos lados.
• **c)** ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, cuya área es de 4.800 m^2 sabiendo que su largo es el triple de su ancho?

a) Realice un esquema interpretativo.
b) Determine el área del terreno en función del ancho a.
c) Calcule las dimensiones.

3.6. SÍNTESIS

Ecuaciones

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las *ecuaciones polinómicas de primer grado (o lineales)* con una incógnita tienen la forma:

a x + b = 0, siendo a y b números reales con $a \neq 0$.

$$\overbrace{a\,x + b}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax es el término lineal

b es el término independiente

$$3\,x + 6 = 0 \rightarrow 3x = -6$$

$$x = -2 \quad \text{solución de la ecuación}$$

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en el conjunto de los números reales, es necesario tener presente las propiedades de la adición y multiplicación con números reales así como las operaciones con expresiones algebraicas.

$$\frac{x+1}{5} = \frac{3x-9}{3}$$

$$3\,(x+1) = 5\,(3x-9)$$

$$3x + 3 = 15x - 45$$

$$3 + 45 = 15x - 3x$$

$$48 = 12x$$

$$x = 4$$

Inecuaciones lineales

Una inecuación lineal es una desigualdad que se puede escribir:

$ax + b < c \qquad ax + b \leq c$

$ax + b > c \qquad ax + b \geq c$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$

Al igual que para una ecuación, *resolver* una inecuación también es hallar los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Este conjunto de valores que la verifican se llama **conjunto solución.**

$$\overbrace{ax + b}^{\text{Primer miembro}} < \underbrace{c}_{\text{Segundo miembro}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &-2x + 5 \geq 6 \\ &-2x \geq 6 - 5 \\ &-2x \geq 1 \quad \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Escribimos la solución como intervalo

$$S =]-\infty, -1/2\,]$$

En la recta

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las *ecuaciones polinómicas de segundo grado (o cuadráticas)* con una incógnita tienen la forma:

$$\overbrace{a x^2 + bx + c}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{0}^{\text{Segundo miembro}}$$

ax^2 es el término cuadrático, y a su coeficiente

b x es el término lineal y b su coeficiente

c es el término independiente

$a\,x^2 + b + c = 0$, siendo a, b y c números reales con $a \neq 0$.

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ (o *raíces* de un polinomio de segundo grado) pueden obtenerse a partir de los coeficientes *a, b, c.*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2.1} \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Con esto se tiene $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

Si uno de los términos no aparece en la ecuación es porque su coeficiente es nulo, en ese caso conviene completar la ecuación para aplicar la fórmula.

$a\,x^2 + c = a\,x^2 + 0.x + c$

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 + 0\,x - 36$$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4.(-36)}}{2.1} \qquad x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{144}}{2}$$

$$x_1 = -6 \quad \text{y} \quad x_2 = 6$$

Para determinar el tipo de solución, también llamado naturaleza de las raíces, basta con analizar el radicando de la fórmula de resolución. Éste recibe el nombre de *discriminante*, y se nombra con la letra griega delta Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ $x_1 \neq x_2$ raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$ raíces reales coincidentes.
- Si $\Delta < 0$ no tiene raíces reales

3.7. EJERCITACIÓN PARA EL ESTUDIANTE

Contenidos conceptuales

Ecuaciones algebraicas de primer grado. Ecuaciones algebraicas de segundo grado. Fórmula resolvente. Inecuaciones de primer grado. Problemas de aplicación.

Objetivos

Al finalizar el módulo el estudiante podrá:

• Plantear las ecuaciones de primer y segundo grado en casos concretos
• Encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas
• Resolver problemas planteando la inecuación correspondiente
• Interpretar las soluciones encontradas
• Expresar por medio de intervalos las inecuaciones

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $3(x-1)+4x-3=4(x+2)+1$ Rta: $x = 5$

b) $\frac{2x-6}{5}+\frac{x}{3}=(x-1)$ Rta: $x = -3/4$

c) $\frac{5-x}{4}+\frac{x+2}{3}=8x$ Rta: $x = 23/95$

d) $\frac{6x+3(x-1)}{3}=4-2x$ Rta: $x = 1$

e) $\frac{1-x}{4}+\frac{5x+2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$ Rta: $x = -11/9$

f) $5(3x-4)+3(x+1)-x=\frac{3-x}{2}$ Rta: $x = 37/35$

g) $\frac{1}{4}(3x-5)+\frac{1}{2}(4-2x)=\frac{1}{2}(x+3)$ Rta: $x = -1$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones y clasifique sus raíces.

a) $x^2-4x-5=0$ Rta : $x1 = 5$; $x2 = -1$

b) $-x^2-3x+4=0$ Rta : $x1 = -4$; $x2 = 1$

c) $2x^2-2x-4=0$ Rta : $x1 = 2$; $x2 = -1$

d) $4x^2-16=0$ Rta : $x1 = 2$; $x2 = -2$

e) $2x^2+6x=0$ Rta : $x1 = 0$; $x2 = -3$

f) $x2-2x+1=0$ Rta : $x1 = x2 = -1$

Ejercicio 3

Resolver y expresar el conjunto solución como intervalo

a) $2\,(5 - x) < \dfrac{x+1}{3}$ Rta: $x > \dfrac{29}{7}$ $S = \left]\dfrac{29}{7}; \infty\right[$

b) $7 - (\ 2x - 5\ ) \geq 4 - x$ Rta: $x \leq 8$ $S =]-\infty; 8]$

c) $-6\,(3 - 2x) + 5\,(x + 4) \leq 3x$ Rta: $x \leq -\dfrac{1}{7}$ $S =]-\infty; -1/7]$

d) $x + 2\,(x + 1) \leq 5\,(x + 4)$ Rta: $x \geq -9$ $S = [-9; \infty[$

e) $x - 5 + 2\,(1 - x) > 3 + x$ Rta: $x < -3$ $S =]-\infty, -3[$

f) $3x - 2\,(5x + 4) < 6x + 5$ Rta: $x > -1$ $S =]-1; \infty[$

Matemática
Ingreso 2017

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO