Ingreso 2017

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Autoridades de la UNCuyo

Rector
Ing. Agr. Daniel Ricardo Pizzi

Vicerrector
Dr. Prof. Jorge Horacio Barón

Secretaria Académica
Prof. Esp. Adriana García

Autoridades del ITU

Directora General
Lic. Prof. Mariana Castiglia

Secretaria de Extensión y Relaciones Institucionales
Lic. Adriana Defacci

Secretario de Administración y Finanzas
Cdor. Pedro Suso

Responsable del Área de Gestión Pedagógico-Didáctica
Lic. Prof. Eleonora Valdivieso

Directores y coordinadores

Área de Tecnologías de la Producción
Ing. José Biurriarena

Mendoza
Ing. Jorge García Guibout

Dra. Selva Rodríguez
Ing. Gloria Tutera
Lic. Diana Dominguez
AUS. Martín Silva
Ing. Alejandro Fernández

Luján de Cuyo
Mgter. Nora Metz

Rivadavia
Lic. Guillermo Barta

San Martín
Lic. Eduardo Ferrer

General Alvear
Ing. Walter López

San Rafael
Cdor. Gerardo Canales

Tunuyán
Cdor. Oscar Niemetz

Coordinación de ingreso 2017
Esp. Marianela Aveni Metz

Equipo de producción de materiales de Matemática
Prof. Norma Castellino
Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño de cubierta e interior
D.G. Noelia Díaz Puppato
D.G. Eduardo A. Lentini

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

MÓDULO 4

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

MÓDULO 4: ***FUNCIONES***

FUNCIONES

Interpretación de gráficos. Función afín. Definición y representación gráfica. Ecuación general de la recta. Función cuadrática. Definición. Representación gráfica. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

• Desarrollar habilidad para diferentes formas de expresión de función lineal y cuadrática
• Representar gráficamente funciones en ejes cartesianos
• Interpretar los contenidos en la resolución de problemas
• Desarrollar diversas estrategias para la resolución de situaciones problemáticas

4. FUNCIONES

Definición

Las *funciones* son un concepto importante de la matemática actual ya que es una herramienta necesaria para *describir, analizar, sacar conclusiones e interpretar diversas situaciones de otras ciencias o de la matemática misma a través de gráficos, tablas y fórmulas.*

Son ejemplos de ellas:

• La presión atmosférica depende de la altura a la que sea medida, dado que a cada altura le corresponde un valor de presión atmosférica.

• Se hace un descuento del 15% del valor de la compra, esto es a cada importe total le corresponde un importe de descuento.

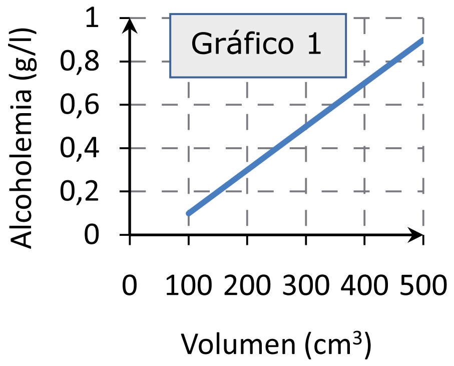
Daremos un ejemplo de función para poder interpretar, su definición formal.

POR EJEMPLO

Sabiendo que una de las principales causas de los accidentes de tránsito se debe al excesivo consumo de alcohol, ya que produce disminución de los reflejos, falsa apreciación de las distancias, subestimación de la velocidad y reducción de la percepción del riesgo; la función frepresentada en el gráfico 1, muestra la alcoholemia que alcanza un hombre de 60 kg, en función del volumen de vino ingerido. En el gráfico 2 la función f representa la alcoholemia que alcanza una persona en función del tiempo, a partir de la ingesta de ¾ litro de vino.

Teniendo en cuenta la ley que establece el límite de alcoholemia (cantidad de alcohol por litro de sangre) es de 0,5g por litro de sangre en conductores de autos, 0,2g/l para motociclistas y 0g/l para conductores de vehículos de pasajeros.

Observando cada gráfica, responder:

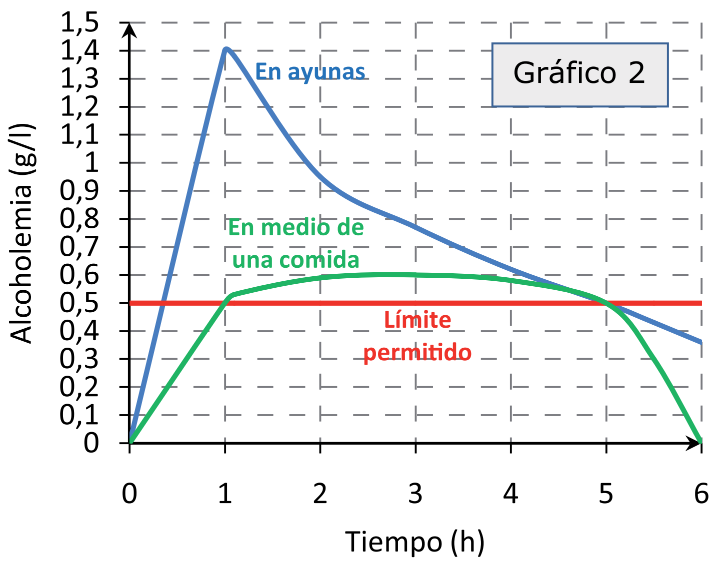


Un vaso de vino equivale a 100 cm^3

a) ¿Qué alcoholemia alcanza si bebe dos vasos de vino?

b) ¿Qué cantidad de vino ingirió si alcanza una alcoholemia de 0,7 g/l?

c) ¿Qué volumen como máximo puede beber un conductor de auto que pesa 60 kg?



a) ¿En qué momento se alcanza la mayor alcoholemia?

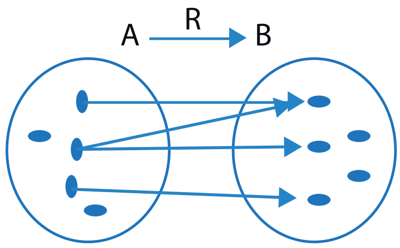
b) ¿Cuántas horas transcurren a partir de la ingesta de alcohol en medio de las comidas, hasta alcanzar el límite permitido para conducir?

RELACIÓN

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se llama relación binaria R de A en B, a una ley que hace corresponder a elementos de A, elementos de B.

Se muestra la relación en un diagrama de Venn y expresada por comprensión



$$R = \ (a, b) / (a, b) \in A \text{ x } B,\ a \, R \, b\}$$

Cuando se formula una expresión que liga dos o más objetos entre sí, postulamos una relación (no necesariamente matemática) Por ejemplo: **Juan es padre de Laura. (Juan, Laura)**

- **Dominio:** Es el conjunto formado por los primeros elementos del par ordenado o cupla.

- **Imagen:** Es el conjunto formado por los segundos elementos del par ordenado o cupla.

FUNCIÓN

Definición

Dado un conjunto A y un conjunto B, una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de **existencia** y **unicidad**.

La definición puede sintetizarse diciendo que **para todo elemento de A existe un único elemento de B** con el cual se relaciona.

EXISTENCIA → Todos los elementos de A tienen su correspondiente elemento en B

UNICIDAD → A cada elemento de A le corresponde un único elemento de B

Es importante cuando nombramos funciones decir en qué conjuntos está definida ya que por ejemplo una relación en la que para todo valor de "x", "y" se calcula según:

$$\mathbf{y = x : 3}$$

Definida de Z en Z, **no es función**, no cumple con la condición de existencia, por ejemplo para el entero 2 no existe ningún entero con el cual se relacione a través de la fórmula dada.

En cambio si está definida de IR en IR **sí es función**, ya que para todo real existe otro único real que se obtiene dividiendo por 3.

En general el esquema que se utiliza para funciones numéricas es el siguiente:

Esquema funcional

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

El conjunto de partida A es el dominio de la función, lo representamos con la letra D, el conjunto de llegada lo tomaremos como el conjunto de los números reales IR. En base a esto, el esquema funcional lo escribimos como:

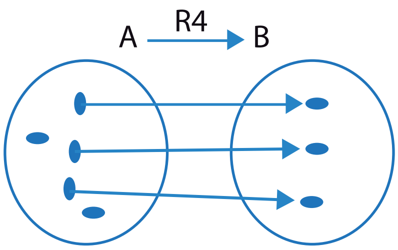
Esquema funcional

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow IR \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

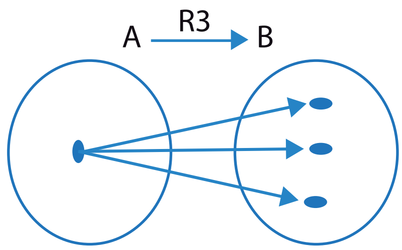
Llamamos **x (variable independiente)** a los elementos del conjunto A, e **y (variable dependiente)** a los elementos del conjunto B.

En el ejemplo "Juan es padre de Laura" tenemos una relación que no es función, porque Juan puede tener otros hijos, con lo que le corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada y no cumple la condición de unicidad. Si la relación la plantemos "Su padre es" sería función, porque a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde un y solo un elemento en el conjunto de llegada.

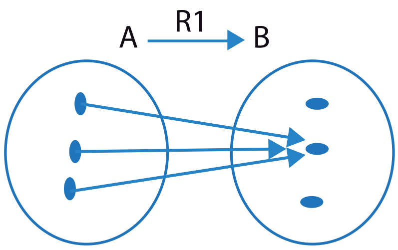
Consideremos las 4 relaciones dadas en las figuras, veremos cuáles de ellas corresponden a funciones



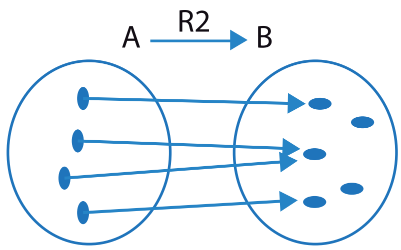
Relación: no es función porque no cumple con la condición de existencia



Relación: no es función porque no cumple con la condición de unicidad



La relación es FUNCIÓN

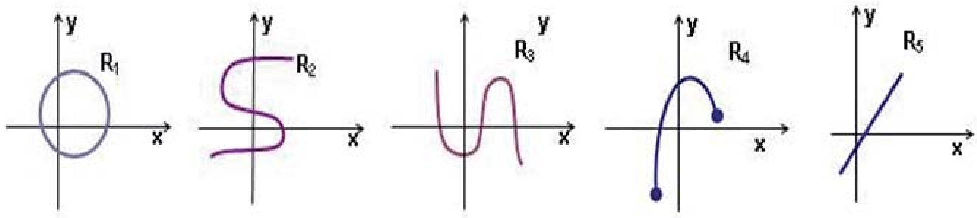


La relación es FUNCIÓN

EJERCITACIÓN

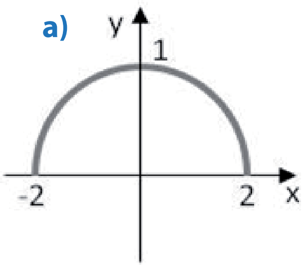
1) Indique, justificando, cuál de las siguientes relaciones son funciones.

Ayuda: trace rectas verticales y observe cuántos puntos de corte tiene cada recta con la gráfica; si es más de uno no es una función.



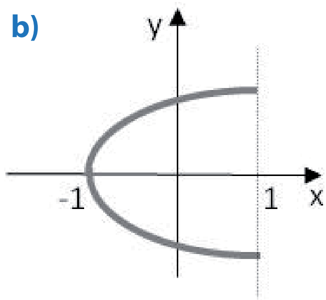
2) Indique cuáles de los gráficos corresponden a funciones de A en B:

a)



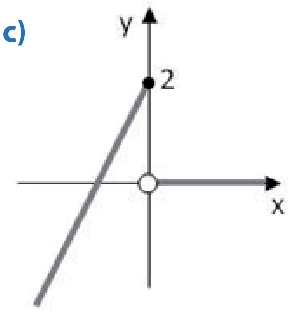
$A=[-2,2]$ $B=\mathrm{IR}$

b)



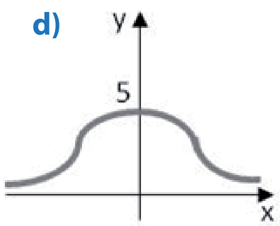
$A=[-1,1]$ $B=[-1,1]$

c)



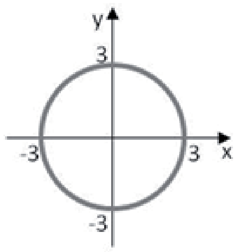
$A=\mathrm{IR}$ $B=\mathrm{IR}$

d)



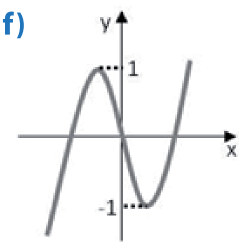
$A=\mathrm{IR}$ $B=\mathrm{IR}$

e)



$A=[-3,3]$ $B=[-3,3]$

f)

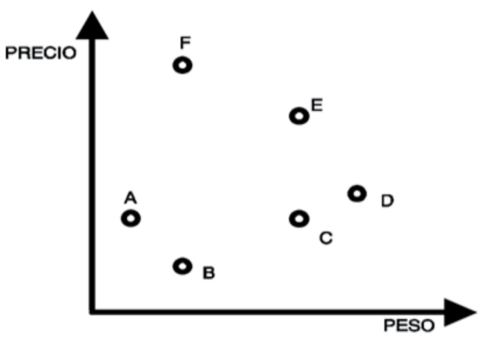


$A=\mathrm{IR}$ $B=\mathrm{IR}$

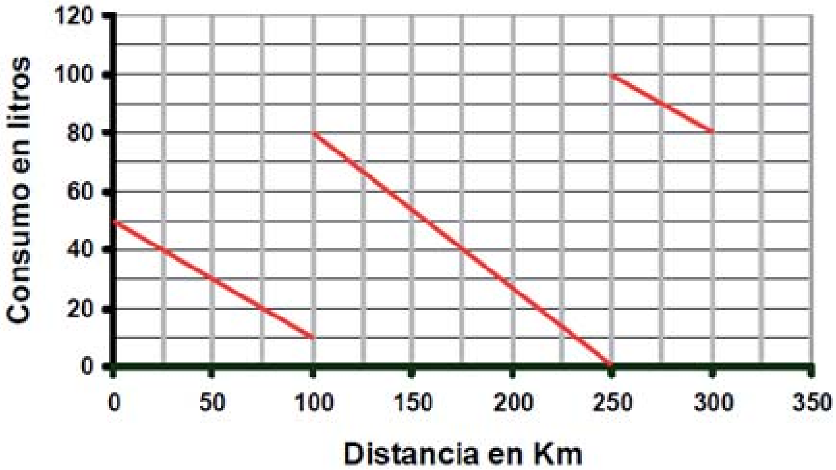
3) Indique cuáles de los gráficos corresponden a funciones de A en B:

3.1. Cada punto de este gráfico representa una bolsa de azúcar. Observando el gráfico responder:

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?
b) ¿Qué bolsa es la más pesada?
c) ¿Qué bolsa es la más barata?
d) ¿Qué bolsas tienen el mismo peso?
e) ¿Qué bolsas tienen el mismo precio?
f) ¿Qué bolsa conviene más E ó C? ¿Por qué?
g) ¿La gráfica corresponde a una función?

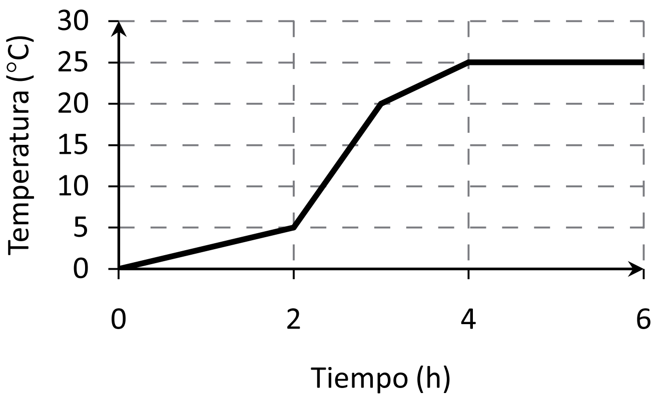


3.2. El gasoil que hay en un depósito de un autobús viene representado por la siguiente gráfica:



a) Cuántos litros tenía el depósito al salir
b) Cuántos litros tenía a su llegada
c) Cuántos litros consumió durante el viaje
d) Qué ocurrió en el km. 250
e) Cuándo puso el conductor por primera vez gasoil
f) Corresponde el gráfico a una función

3.3. El siguiente gráfico muestra la variación de temperatura de un alimento en función del tiempo transcurrido desde que fue sacado de la heladera.

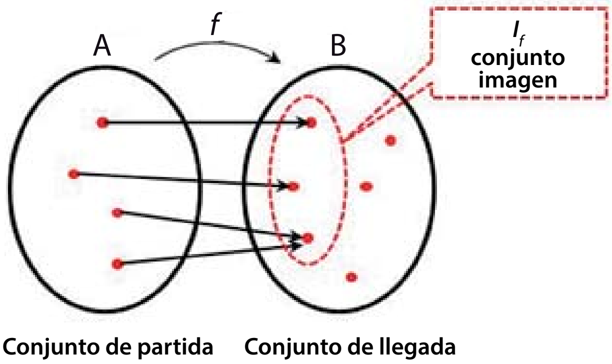


Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿A qué temperatura fue retirado de la heladera?
b) ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó 20ºC?
c) ¿Durante qué hora aumentó más rápidamente la temperatura?
d) ¿A qué hora disminuyó la temperatura?
e) ¿A partir de qué hora mantuvo la temperatura constante?
f) ¿Qué temperatura alcanzó al finalizar la segunda hora?
g) ¿Corresponde el gráfico a una función?

4.1. DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

El dominio de la función es el conjunto al que pertenecen los elementos para los cuales la función está definida, es decir, es el conjunto de elementos que tienen imagen.
El conjunto imagen es el conjunto al que pertenecen todas las imágenes de los elementos del dominio.



El conjunto de partida A, lo llamamos **dominio de la función**, y al conjunto de elementos al que llegan las flechas, que está incluido en el conjunto de llegada B, señalado con I_f, lo llamamos **conjunto imagen**.

Definición

Se llama **dominio (Dom (f))** al conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.

El dominio coincide con el conjunto de partida $D \equiv A$

Definición

Se llama **imagen (Im(f))** al conjunto de valores de y que están asociados a cada elemento x.

El conjunto imagen está *incluido* en el *conjunto de llegada* $I \subset B$

POR EJEMPLO

a) $f: IR \rightarrow IR$ dada por $f(x) = x^2$,el conjunto dominio es Dom (f) = IR y el conjunto imagen es Im (f) = IR_0^+

b) $f: ID \rightarrow IR$ dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$, para determinar el dominio, tenemos en cuenta que el radicando debe ser positivo, de lo contrario el resultado no es un número real, por lo tanto el conjunto dominio está formado por todos los valores x que cumplen la condición $x > 1$ Dom (f) = [1,∞ [. Si consideramos x =1 vemos que el valor más chico que toma la función es cero.

El conjunto imagen es: Im (f) = [0, ∞ [. El dominio es un subconjunto de IR

4.2. RAÍCES DE UNA FUNCIÓN

Definición

Se llaman raíces de una función a los valores de la variable independiente que pertenecen al dominio y su imagen es cero, es decir los valores de x que hacen f (x) = 0.

Gráficamente las raíces son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje de abscisas o eje x.

Para determinar las raíces de f planteamos la ecuación correspondiente: f (x) = 0

$x^2 - 1 = 0$ si despejamos $|x| = 1$ siendo $x = \pm 1$

Las soluciones de dicha ecuación son + 1 y -1. Entonces *"esos dos valores son las raíces de la función dada"*

4.3. ORDENADA AL ORIGEN DE UNA FUNCIÓN

Definición

Se llama Ordenada al Origen de una función, a la imagen de "cero" por la función.

El cero debe pertenecer al dominio f (0) = Ordenada al Origen. Gráficamente es el punto donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas o eje y.

POR EJEMPLO

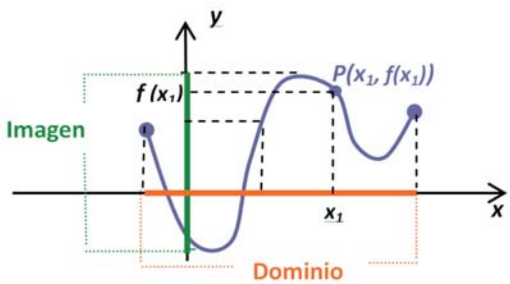
$f : IR \rightarrow IR$ tal que f (x) = x2 - 1

Para determinar la ordenada al origen de f calculamos:

$f(0) = 0^2 - 1 =$ **-1 → Ordenada al origen**

4.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La representación gráfica de una función se hace sobre un plano cartesiano. El gráfico de una función $f : D \rightarrow IR \ / \ y = f(x)$, es el conjunto de todos los puntos del plano cartesiano de la forma $P(x, f(x))$ o $P(x, y)$, en los que la primera componente pertenece al dominio de la función, y la segunda componente es la respectiva imagen.



4.5. FUNCIONES POLINÓMICAS

Definición

Se llama función polinómica de grado n a la función definida de la forma f: IR → IR tal que: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ siendo n= natural

Donde
- **n es un número natural**
- **$a_0, a_1, a_2 ... a_n$** son números reales, llamados coeficientes:
- **a_n** recibe el nombre de **coeficiente principal**
- **a_0** es el **término independiente**

En este curso veremos solo la función polinómica de grado uno y grado dos.

4.6. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 1 (Función afín)

Definición

Se llama **función afín** a toda función definida como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = ax + b$$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$

La función afín es una ***función polinómica de grado 1***. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

La gráfica de una función afín es una ***RECTA***, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$f(x) = a x + b$$

a es el ***coeficiente del término lineal***,
gráficamente representa la ***"pendiente"*** de la recta

b es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen
y señala la ordenada del punto donde *f* corta al eje de las ordenadas *y*.

- **Cuando b = 0 la función recibe el nombre de "FUNCIÓN LINEAL"**

Expresión → ***Gráfica***

f (x) = a x — La recta pasa por el origen de coordenadas

- **Cuando a = 0 es una función polinómica de grado cero llamada "FUNCIÓN CONSTANTE"**

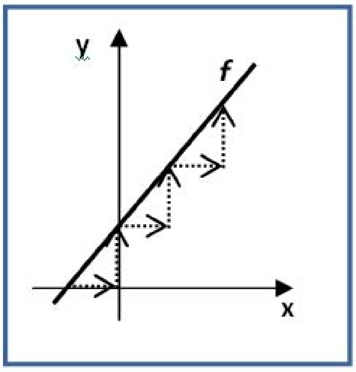
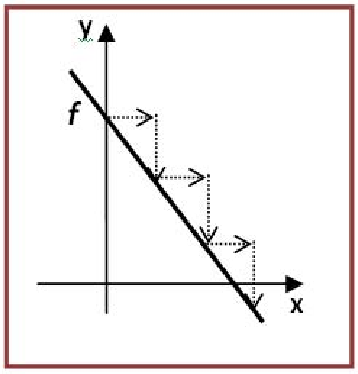
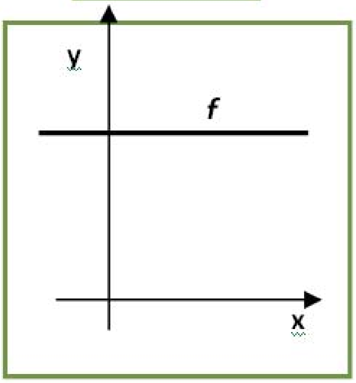
Expresión → ***Gráfica***

f (x) = b — La recta es paralela al eje de abscisas

Importante: La función constante **no es una función** afín porque **a = 0**. La incluimos en este análisis porque su gráfica es una recta.

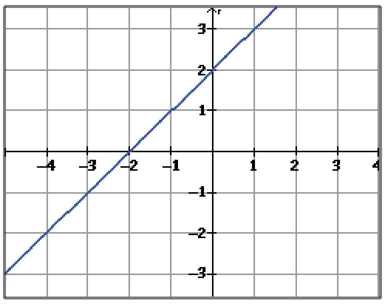
4.6.1. Análisis del coeficiente principal

$f(x) = ax + b$

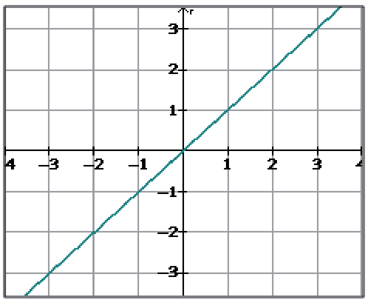
Si $a > 0$	Si $a < 0$	Si $a = 0$
		
Por cada unidad que se incrementa *x*, la imagen crece *a* unidades.	Por cada unidad que se incrementa *x*, la imagen decrece *a* unidades.	Por cada unidad que se incrementa *x*, la imagen no varía
Función creciente	Función decreciente	Función constante

La pendiente nos indica cuantas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, por cada unidad que aumenta la variable independiente.

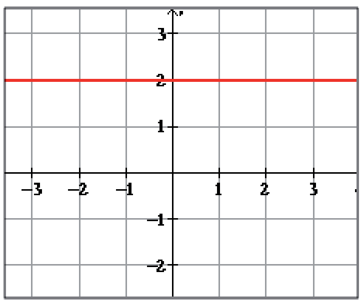
POR EJEMPLO



Función afín



Función lineal



Función constante

4.6.2. Raíz de la función afín

Por ser una función polinómica de grado uno, tiene una raíz real y es por definición el valor de la variable independiente que anula la función.

$$f(x) = ax + b$$

$$0 = ax + b \rightarrow -b = ax$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

4.6.3. Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

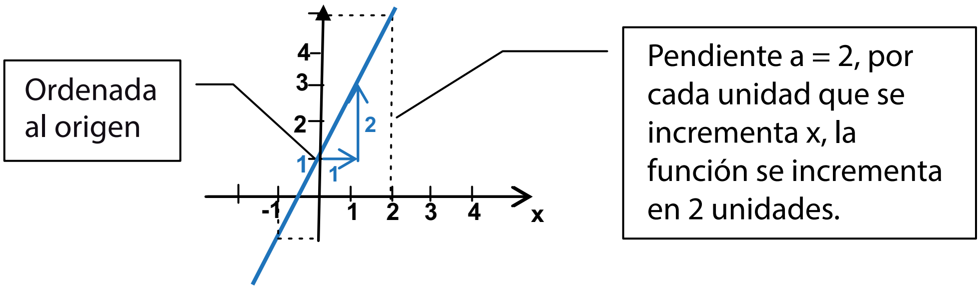
$$f(x) = ax + b$$
$$f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Definición	*Gráficamente*
Raíz $f(x) = 0$	la recta corta al eje de abscisas
Ordenada al origen $f(0)$	la recta corta al eje de ordenadas

4.6.4. Representación gráfica de la función afín

Ejemplo 1:

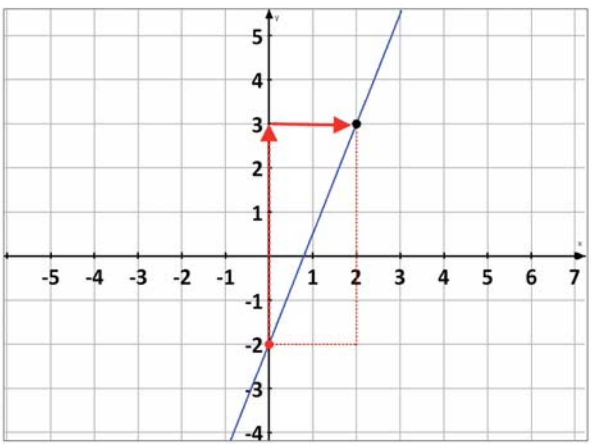
Consideremos la función $f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR} \; / \; y = 2x + 1$.
La representamos a partir de su pendiente y ordenada al origen.



Obtención de la expresión de la función a partir de la gráfica

Consideremos las siguientes gráficas:

a)



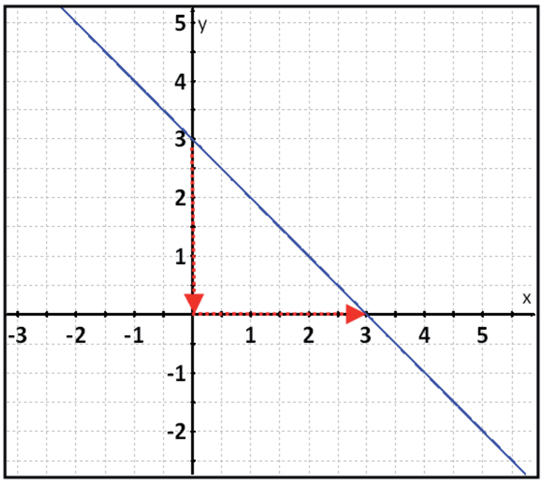
Ordenada al origen $b = -2$

Subo 5 unidades en y
Corro dos unidades a la derecha en x

Pendiente: $a = \dfrac{5}{2}$

La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = \dfrac{5}{2}x - 2$

b)



Ordenada al origen $b = 3$

Bajo 3 unidades en y
Corro 3 unidades a la derecha en x

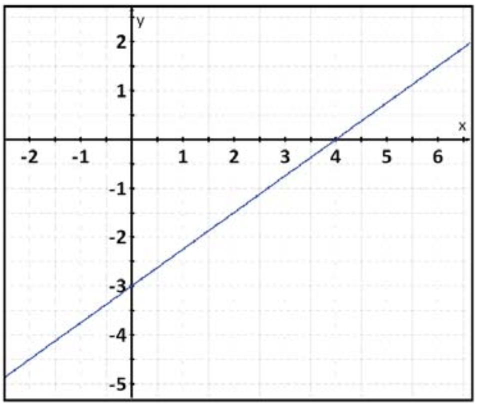
Pendiente: $a = \dfrac{-3}{3} = -1$

La ecuación de la recta que representa a la función es: $y = -x + 3$

EJERCITACIÓN

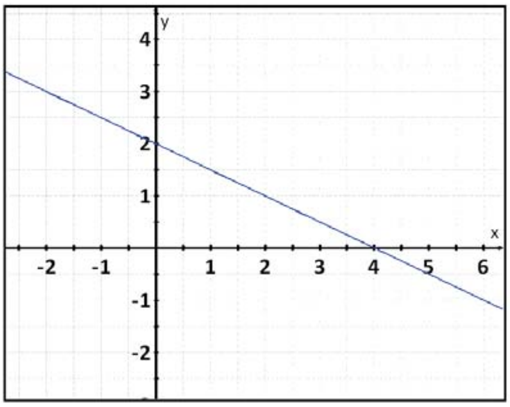
Encuentre la fórmula de las siguientes funciones afines dadas por sus gráficos:

a)



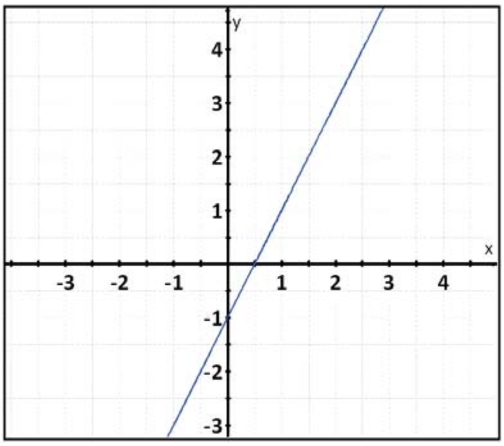
$f(x) =$

b)



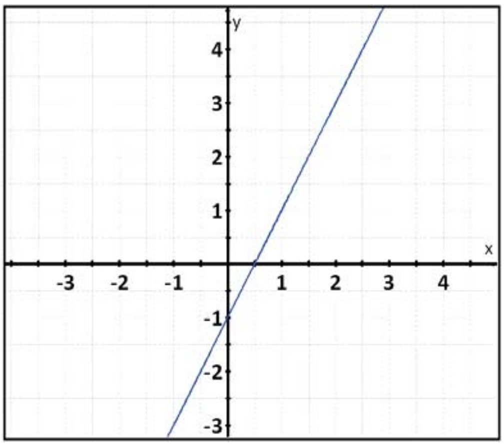
$f(x) =$

c)



$f(x) =$

d)



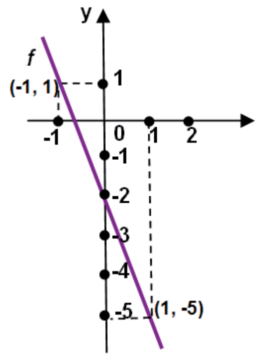
$f(x) =$

Ejemplo 2:

También es posible representarla mediante una tabla de valores. Es importante recordar desde la axiomática, que por dos puntos distintos pasa una y solo una recta a la que pertenecen, por lo que es suficiente calcular dos puntos de la misma.

Sea $f : IR \rightarrow IR \; / \; y = -3x - 2$

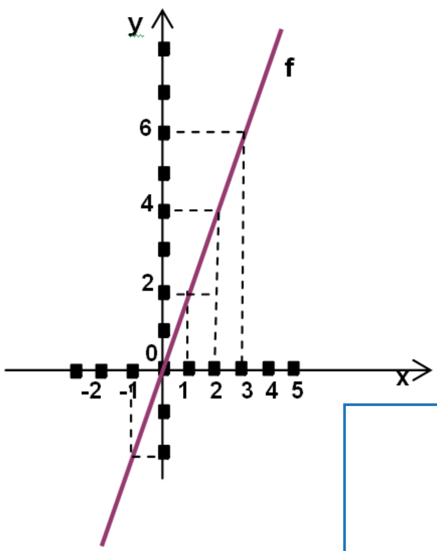
x	y	P(x,y)
-1	f(-1)= 1	(-1,1)
1	f(1) = -5	(1, -5)



Si la función es lineal b = 0. Su gráfica pasa por el origen de coordenadas

Analicemos la función $f(x) = 2x$

Utilizando una tabla de valores para su representación



x	y
1	2
2	4
3	6

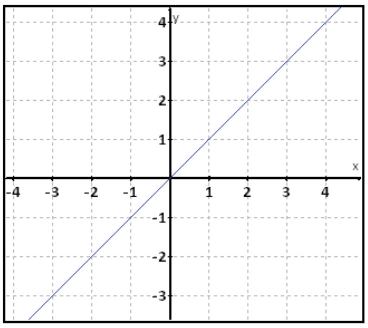
Al calcular la razón entre la ordenada y la abscisa de cada punto obtenemos:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 = a$$

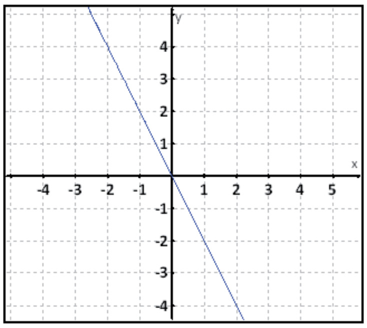
En el caso de una función lineal, la razón entre la ordenada y la abscisa de un punto perteneciente a la recta es igual a la pendiente de la misma.
No tenemos en cuenta el origen de coordenadas

Si a = 1 $\rightarrow$ f(x) = x recibe el nombre de ***función identidad.***

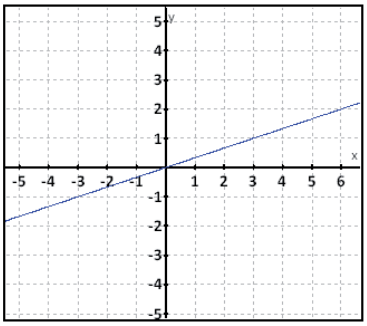
Ejemplo 3:



$y = x$
(función identidad)



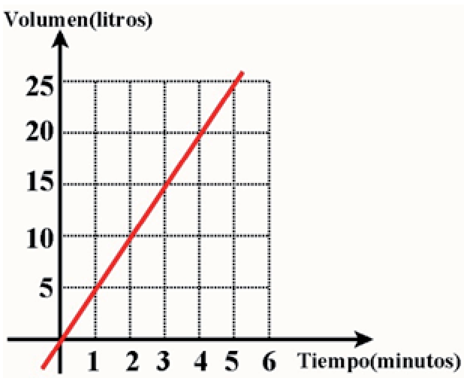
$y = -2x$



$y = \frac{1}{3}x$

Ejemplo 4:

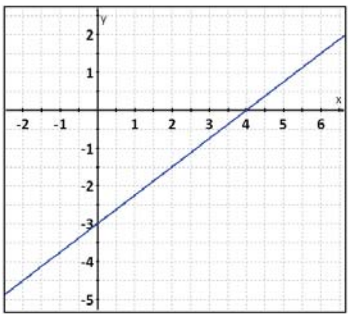
Supongamos un estanque que está vacío. Se abre un grifo y se comienza a llenar a razón de 5 litros por minuto. La variable independiente es el tiempo, medido en minutos, la dependiente es la cantidad de litros que ingresan al estanque. Hallar una función que represente la situación dada.



Ordenada al origen b= 0 Pendiente a = 5 La función representada es f(x) = 5x

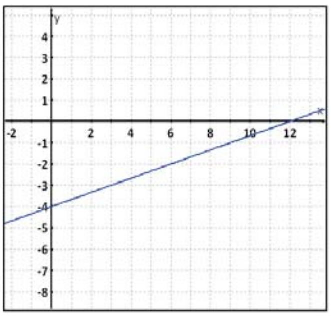
Ejemplo 5:

Vimos representación utilizando tabla de valores, dos puntos que podemos utilizar para su representación, son la intersección con los ejes.



$f: IR \rightarrow IR \;/\; y = \frac{3}{4}x - 3$

ordenada $f(0) = -3$
raíz $x = 4$



$f: IR \rightarrow IR \;/\; y = \frac{1}{3}x - 4$

ordenada $f(0) = -4$
raíz $x = 12$

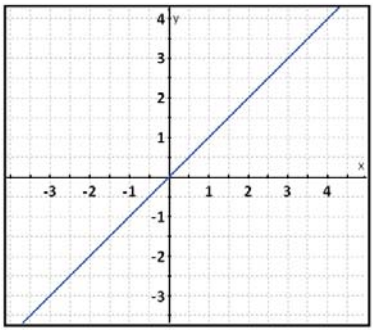
EJERCITACIÓN

1) Dadas las siguientes funciones afines:

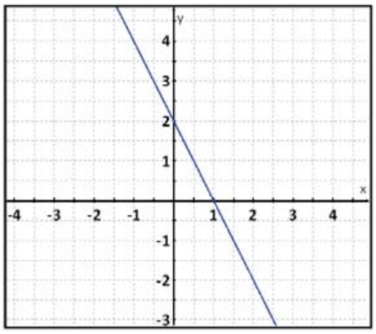
$f(x) = -2x + 4$ $\qquad$ $f\ (x) = 5x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $f\ (x) = \frac{1}{3}x - 4$

a) Indique la pendiente y la ordenada en el origen
b) El valor de la raíz
c) Represente gráficamente cada función

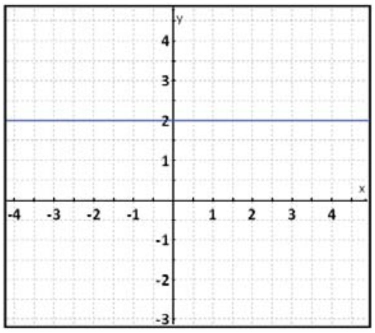
2) Observe las siguientes gráficas para contestar los ítems que siguen:



f(x)



g(x)



h(x)

a) Una con flechas, según corresponda:

La función f(x) tiene pendiente	nula
La función g(x) tiene pendiente	positiva
La función h(x) tiene pendiente	negativa

b) Encierre la fórmula correspondiente en cada caso:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \\ -x \\ \frac{1}{2}x \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 2 \\ -2x + 2 \\ 2x + 2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x \\ 2x \\ 2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de las} \\ \text{anteriores} \end{cases}$$

3) Un plomero cobra \$15 por la visita a domicilio y \$25 por cada hora de trabajo

Horas de trabajo	0	1	2	3	4	5
$						

a) Complete la tabla de valores

b) Represéntela gráficamente, escriba las magnitudes en los ejes.

c) Halle la pendiente

d) Halle la ordenada al origen

e) Escriba la fórmula

Nota: $x = 0$ hace referencia a la visita a domicilio

4.6.5. OBTENCIÓN DE LA EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN

Para obtener $f(x)$ a partir de datos de la función o de su gráfica, consideraremos tres casos:

a) *Datos*: pendiente y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función

Ejemplo: $a = 4$ y la recta pasa por el punto $(1, 3)$ esto equivale a decir que $f(1) = 3$ (la imagen del 1 es 3)

Partimos de la función $f(x) = a\,x + b$, podemos utilizar la notación $y = a\,x + b$

Conocemos $a = 4$, reemplazamos $y = 4x + b$, para determinar b, tenemos en cuenta:

- Para $x= 1$ $y = 3$ en la ecuación nos queda: $3 = 4\,.(1) + b \Rightarrow b = -1$
- La función que cumple con las condiciones es: $y = f(x) = 4x - 1$

b) *Datos*: ordenada al origen y un punto por donde pasa la recta o un par de valores de la función

Ejemplo: $b = 3$ y la recta pasa por el punto $(5,2)$

- Reemplazamos b en la expresión $y = a\,x + 3$, sabemos que para $x= 5$, $y = 2$

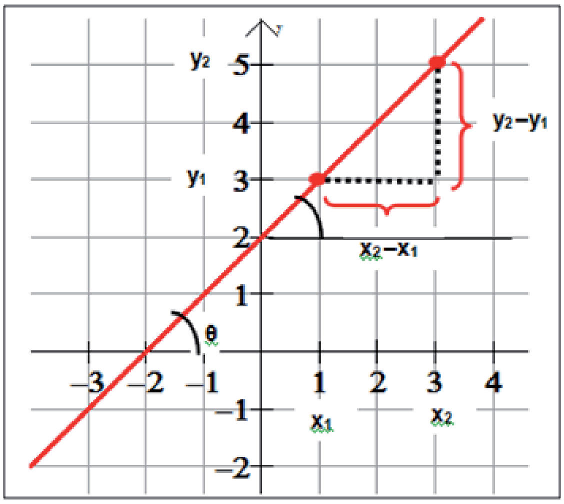
  $2 = a.\,5 + 3$ despejamos $a = (2 - 3)/5 = -1/5$

- La función que cumple con las condiciones es : $y = f(x) = -1/5\,x + 3$

c) *Datos*: Se conocen dos puntos por donde pasa la recta, o lo que es lo mismo dos valores de la función.

En este caso, tenemos dos incógnitas: la pendiente y la ordenada al origen.

Cálculo de la pendiente



La pendiente de la recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x. Su fórmula de cálculo es:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyascente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el gráfico el punto $(x_1, y_1) = (1,3)$
El punto $(x_2, y_2) = (3,5)$

$$\text{tg}\,\theta = a = \frac{5-3}{3-1} = 1$$

Conocido la pendiente, despejamos b como en el punto anterior, ya que conocemos dos puntos que pertenecen a la recta, podemos reemplazar cualquiera de los dos $y = a\,x + b$ reemplazamos: $y = x + b$ teniendo en cuenta que para $x = 1$ $y = 3$

$$3 = 1 + b \Rightarrow b = 2 \text{ valor que vemos en el gráfico } f(x) = x + 2$$

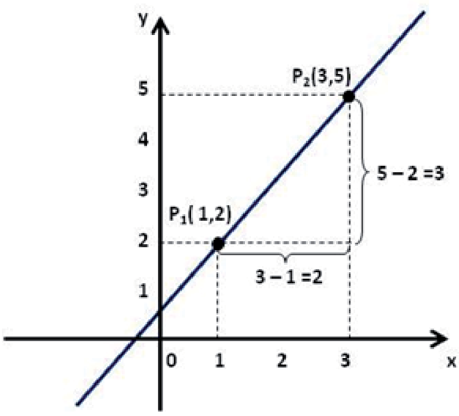
Otra forma de obtener a partir de dos puntos la expresión de f(x), es utilizando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ y reemplazamos los puntos.

Si observamos la ecuación el término $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta.

Para el ejemplo: $y - 3 = \frac{5-3}{3-1}(x - 1)$ $\quad y - 3 = \frac{2}{2}(x - 1);\ \ y - 3 = x - 1 \Rightarrow y = x + 2$

POR EJEMPLO

Construir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1;2)$ y $P_2(3;5)$



Utilizamos la expresión de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$$

Reemplazando por las coordenadas de los puntos y la pendiente calculada resulta:

$$y - 2 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1)$$

despejamos

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

EJERCITACIÓN

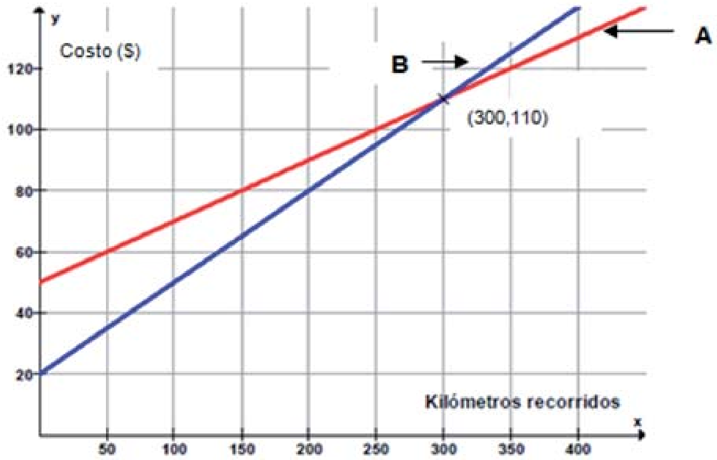
1. Hallar la ecuación de una recta que cumpla las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos (-2,3) y (4 ,2)

b) f(0) = 2 y f(-1) = 0

c) f(4) = - 5 y f(6) = 7

2. En el siguiente gráfico, se ha representado el costo de alquiler de un vehículo, en función de los km. recorridos.



Obtener para cada agencia, la expresión analítica de la función que nos da el costo total según los km. recorridos.

a) Determinar en cada caso, cuál es el costo por km. recorrido.

b) Explicar el significado de la ordenada al origen, para cada una de las agencias.

c) Analizar cuál de las dos opciones es más conveniente en función de los km. que se deseen recorrer.

3. Encontrar la fórmula para calcular la cantidad de agua que queda cada día, en una represa que pierde agua de manera uniforme, si la cantidad inicial es de 1150 millones de litros y los datos diarios son:

Día	**1**	**2**	**3**
Volumen (millones de litros)	1130	1110	1090

a) ¿Si continúa la pérdida de 20 millones de litros por día, en cuánto tiempo se quedará vacía la represa?

b) ¿Cuándo tendrá 150 millones de litros?

4. Una población que tenía 20.000 personas en 1995, va aumentando siempre de la misma manera como se muestra en la tabla. Construye una gráfica y estima la cantidad de personas que habrá este año (suponiendo que se mantiene la tendencia). Encuentra una fórmula general para calcular la cantidad de personas en función del tiempo. ¿Cuándo se superarán las 100.000 personas?

t (años)	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	....
P (miles de personas)	20	24	28	32							

Nota: Cuando se trabaja con el tiempo, para obtener la expresión de la función que representa la situación planteada, tenemos en cuenta que al año de inicio de la medición le asignamos el valor $x = 0$ (1995), de esta manera al año 2015 le corresponde $x = 20$.

5. Para invitar a un concierto a sus amigos, Juan tiene dos posibilidades:

- A: Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de \$100 y pagar las entradas a \$70 cada una.
- B: Pagar cada entrada a \$ 95.

Sea x el número de invitados de Juan: Obtener en función de x el precio a pagar en los dos casos. Finalmente, Juan se presenta al concierto con 7 amigos.

¿Qué solución habría debido adoptar?

4.7. FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO 2 (Función cuadrática)

Las funciones cuadráticas modelan gran parte de situaciones del mundo físico. El estudio de éstas, resulta de interés no sólo en matemática sino también en algunas disciplinas como por ejemplo: Física, Economía, Biología, Ingeniería, Arquitectura.

Son útiles para describir:

- trayectoria de proyectiles
- ganancias y costos de empresas
- variación de la población de determinadas especies
- efectos nutricionales de los organismos
- óptica, etc.

Definición

Se llama **función cuadrática** a toda función f: IR → IR
Tal que $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ en la que a, b y c son números reales, con $a \neq 0$

La función cuadrática es una función polinómica de grado 2. Si la escribimos con la notación utilizada para polinomios:

$$\mathbf{f\,(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0}$$

La gráfica de una función cuadrática es una **PARÁBOLA**, veremos la relación entre los coeficientes y su representación.

$$\mathbf{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

a es el ***coeficiente del término cuadrático*** dependiendo de su signo las ramas de la parábola se abren hacia arriba o abajo.

b es el ***coeficiente del término lineal*** dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.

c es el ***término independiente*** que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas y.

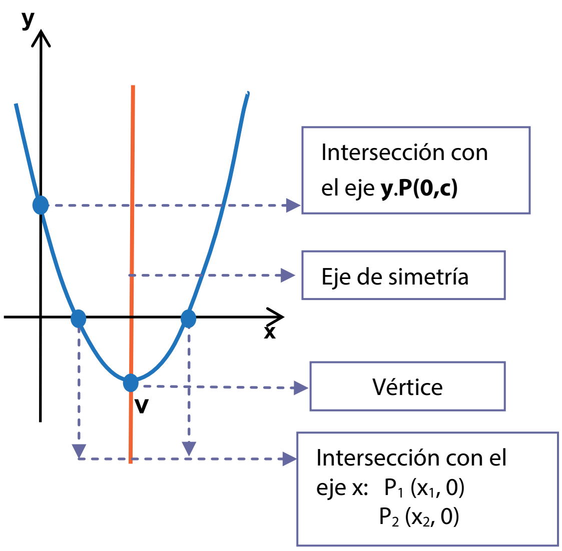
4.7.1. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En la gráfica es importante reconocer elementos, que son de gran utilidad para la representación de la función, como los puntos de intersección con los ejes coordenados, el vértice y el eje de simetría.

a. *Eje de simetría*
Toda función cuadrática tiene un eje de simetría. Este eje es paralelo al eje **y** o coincidente con el mismo. La ecuación de la recta que incluye al eje de simetría es:

b. *Vértice*
Es el único punto de la función que es simétrico consigo mismo con respecto al eje de simetría.
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(\frac{-b}{2.a},\ f\left(\frac{-b}{2.a}\right)\right)$$



c) Puntos de intersección con los ejes

Eje de las ordenadas (Ordenada al origen c)

Este punto tiene por ordenada al término independiente **c** y abscisa nula.
Las coordenadas del punto son: P(0,c).

Eje de las abscisas (raíces reales x_1 y x_2)

Para calcular las coordenadas del o los puntos de intersección de la curva con el eje **x**, se anula la expresión de la función obteniéndose una ecuación cuadrática:
$a\,x^2 + b\,x + c = 0$

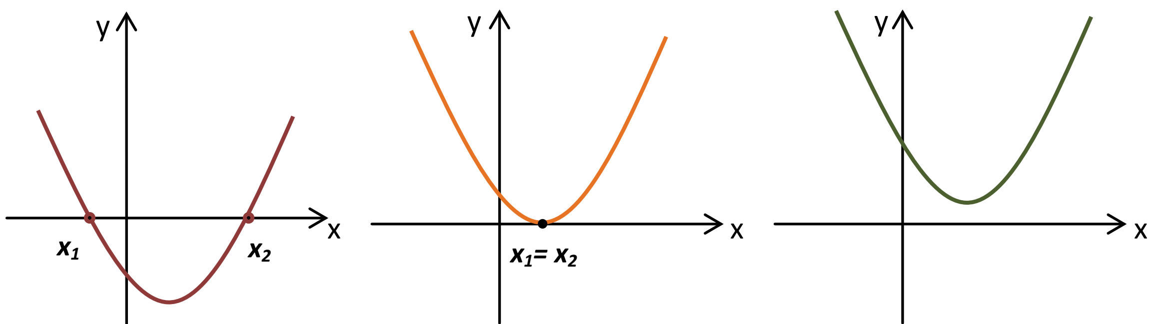
Las soluciones de esta ecuación cuadrática se pueden obtener reemplazando los coeficientes *a, b, c* en la siguiente expresión denominada **"resolvente".**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hemos visto que el radicando recibe el nombre de discriminante, y se simboliza con la letra Δ (delta), de su valor depende el tipo de raíces.

$\Delta = b^2 - 4ac$
Si $\Delta > 0$ $\quad x_1 \neq x_2$ raíces reales distintas
Si $\Delta = 0$ $\quad x_1 = x_2$ raíces reales coincidentes
Si $\Delta < 0$ $\quad$ no tiene raíces reales

Gráficamente



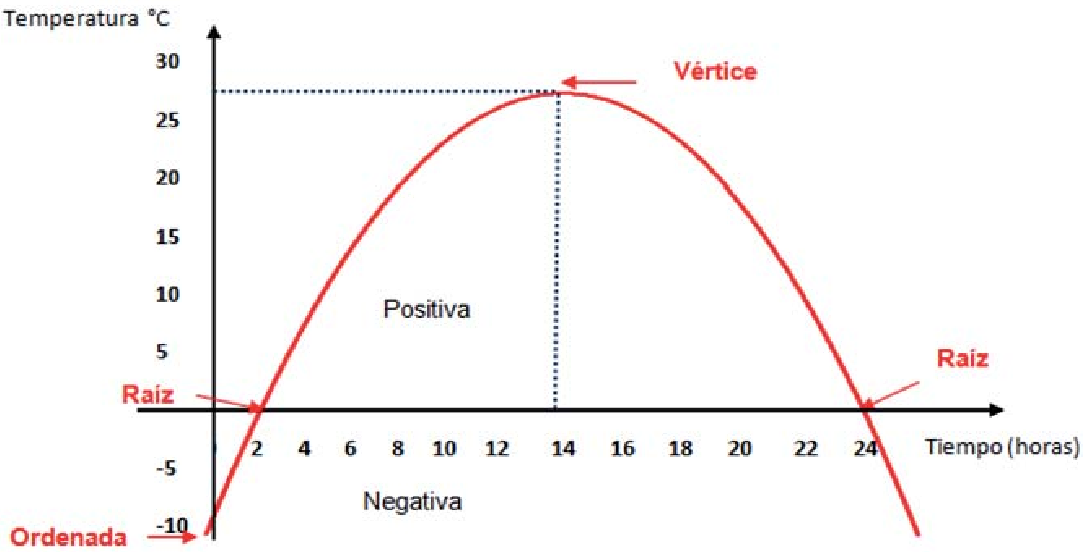
Raíces reales distintas **Raíces reales coincidentes** **No tiene raíces reales**

Importante: Una función polinómica de grado 2 tiene dos raíces reales o ninguna.

EJERCITACIÓN

1. Veremos un problema, para relacionar: vértice, ordenada al origen y raíces con una aplicación de función cuadrática.

En un laboratorio comenzaron a las 0 horas a medir la temperatura de una sustancia. La medición se hizo durante el resto del día y se obtuvo un gráfico que relaciona la temperatura con el tiempo.

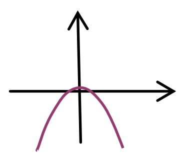
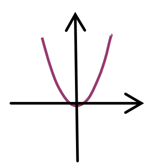


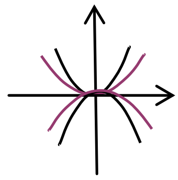
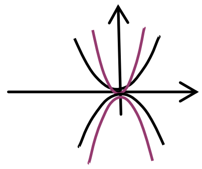
Análisis de la gráfica que representa la situación planteada

a) ¿En qué horario se registraron temperaturas sobre cero?
b) ¿En qué horario se registraron temperaturas bajo cero?
c) ¿Cuál fue la temperatura al inicio de la medición?
d) ¿Durante qué horas se midió un descenso de temperatura?
e) ¿Cuál es la máxima temperatura registrada? ¿A qué hora se hizo la medición?

4.7.2. CARACTERÍSTICAS DE LA REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las características de la función cuadrática, están relacionadas con los coeficientes a, b y c. Comencemos estudiando al coeficiente principal:

Si a<*0*, las ramas de la parábola abren hacia abajo.	
Si a>*0*, las ramas de la parábola abren hacia arriba.	

Si $0 < \lvert a \rvert < 1$, la parábola se ensancha con respecto a la parábola en la que $\lvert a \rvert = 1$	
Si $\lvert a \rvert > 1$, la parábola se angosta con respecto a la parábola a la parábola en la que $\lvert a \rvert = 1$	

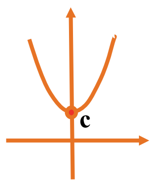
Observamos entonces que de acuerdo al signo del coeficiente del término cuadrático, y conociendo las coordenadas del vértice es posible definir el conjunto imagen de la función.

¿Qué pasa con b y c?

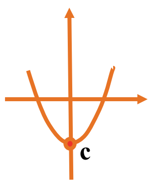
$y = ax^2 + bx + c$

Si $a = 1,\ b = 0,\ c \neq 0$

$y = x^2 + c$



$V(0, c)$



$V(0, c)$

La gráfica se desplaza verticalmente:
- hacia arriba, si $c>0$
- hacia abajo si $c<0$

El eje de simetría coincide con el eje ***y***

Si $c > 0$

$I_f = [c;\ \infty)$

No tiene raíces reales

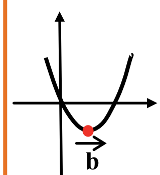
Si $c < 0$

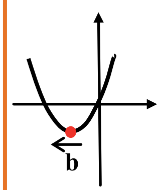
$I_f = [c;\ \infty)$

Presenta raíces reales distintas.

Si $a = 1,\ b \neq 0,\ c = 0$

$y = x^2 + bx$





La gráfica se desplaza horizontalmente:
-hacia la derecha si $b<0$
-hacia la izquierda si $b>0$

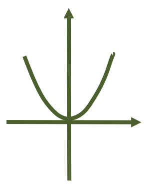
El eje de simetría es paralelo al eje ***y***

$I_f = [\ y_v,\ \infty\ )$

Presenta raíces reales distintas de las cuales una es $x = 0$

Si $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$

$y = x^2$



El vértice coincide con el origen de coordenadas.

El eje de simetría coincide con el eje ***y***

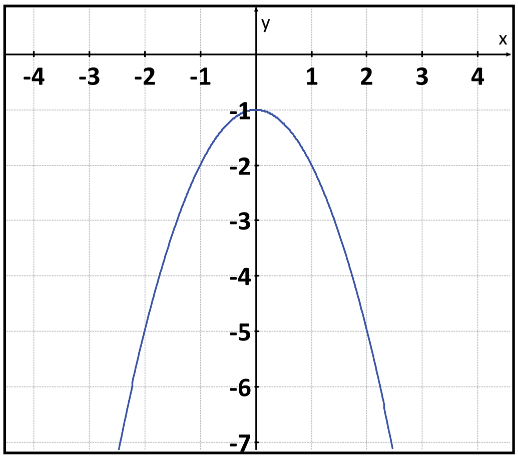
$I_f = [\ 0,\ \infty\ )$

Presenta raíces reales coincidentes $x_1 = x_2 = 0$

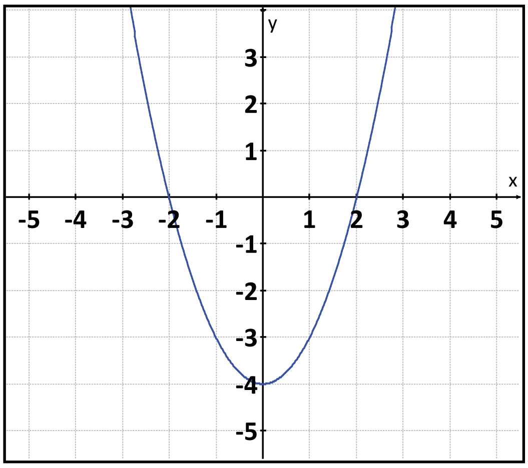
Teniendo presente las características mencionadas es posible dibujar la parábola, conocido el vértice, la ecuación del eje de simetría y las raíces si existen y son reales distintas. En caso contrario, conocido un punto que no sea el vértice, por simetría con respecto al eje, se puede calcular o dibujar su simétrico.

EJERCITACIÓN

1. Dadas las siguientes graficas:



$y = -x^2 - 1$



$y = x^2 - 4$

a) Escriba las coordenadas de los vértices de cada una de ellas.

b) Para cada función, escriba la ecuación del eje de simetría.

c) Identifique y señale las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes para cada gráfica, si existen.

d) Defina el conjunto imagen para cada una de las funciones dadas.

4.7.3. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Hasta ahora sólo hemos trabajado con la expresión general o polinómica de la función cuadrática, a continuación te presentamos un cuadro con todas las formas de expresar la función cuadrática.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v, \quad a \neq 0$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \quad a \neq 0$	a, x_1, x_2

EXPRESIÓN CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La expresión canónica, nos permite visualizar directamente las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

Su expresión es: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

Siendo el vértice: $V(x_v, y_v)$ y la ecuación del eje de simetría $x = x_v$

Si a =1, la expresión es: $f(x) = (x - x_v)^2 + y_v$

Mediante un ejemplo analizamos la construcción de la expresión canónica a partir de la expresión polinómica de la función cuadrática.

POR EJEMPLO

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$

Si analizamos la expresión canónica, observamos que consta de dos términos:

• el primero, es un producto cuyo primer factor es el coeficiente del término cuadrático y el segundo el cuadrados de un binomio.

• el segundo, es un número real

1º Sacamos factor común 3 (el coeficiente del término cuadrático).	$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)$
2º Multiplicamos y dividimos por 2 el término lineal.	$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\right)$
3º Aplicamos la propiedad asociativa del producto.	$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}\right)$
4º Sumamos y restamos $\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{3}\right)$
5º Utilizamos la igualdad $(x - a)^2 = x^2 - 2a + a^2$	$f(x) = 3 \cdot \left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$
6º Distribuimos el producto con respecto a la suma.	$f(x) = 3 \cdot \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 3 \cdot \frac{37}{36}$
7º Obtenemos así la forma canónica.	$f(x) = 3 \cdot \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$

Siendo las coordenadas del vértice: $V\left(\frac{5}{6}, -\frac{37}{12}\right)$

y la ecuación del eje de simetría: $x = \frac{5}{6}$

EXPRESIÓN FACTORIZADA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sean x_1 y x_2 las raíces reales de una función cuadrática, y *a* el coeficiente del término cuadrático, la expresión factorizada de la función cuadrática tiene por expresión:

$$\boxed{f\ (x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

POR EJEMPLO

Si $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, el coeficiente principal es a = 2, y sus raíces reales son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, entonces la expresión factorizada es:

$$f\ (x) = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$$

EJERCITACIÓN

1. Encuentre una función cuadrática que tenga como ceros $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$ y cuya gráfica pase por el punto (0,10).

2. Dadas las funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2 + 4x$ $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2$ $f(x) = x^2 - 9x + 9$

a) Escriba la función en la expresión canónica.

b) Halle la intersección con los ejes coordenados.

c) Grafique la parábola.

3. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas definidas de $IR \to IR$:

I. $f(x) = x^2 + 2$

II. $f(x) = x^2 + 6x + 9$

III. $f(x) = 4 - x^2$

IV. $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

a) Calcule sus ceros o raíces.

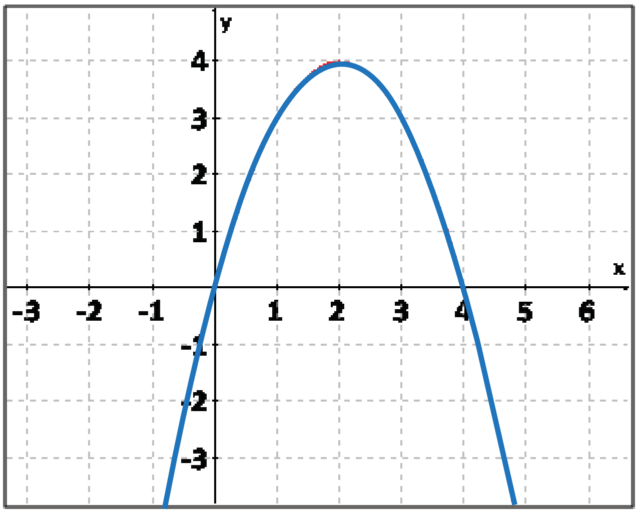
b) Indique intersección con el eje "y".

c) Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

d) Represéntelas gráficamente.

e) Halle la forma canónica, y cuando sea posible, la forma factorizada.

4. A partir de la observación de la gráfica, complete con V las correctas y justifique las falsas.



a) La expresión de la función asociada a la gráfica es: $f(x) = x^2 + 4x$

b) La ecuación del eje de simetría es: $x = 2$

c) Las coordenadas del vértice son: V(4,2)

d) $f(1) = 3$

e) $f(0) = 4$

f) Su forma canónica es: $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

g) Su forma factorizada es: $f(x) = -x.(x+4)$

h) Su conjunto imagen es (-∞ , 4)

4.7.4. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

POR EJEMPLO

Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 40t - 16t^2$

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?

d) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 20 pies

Solución: para poder contestar estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función $h(t)$, y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

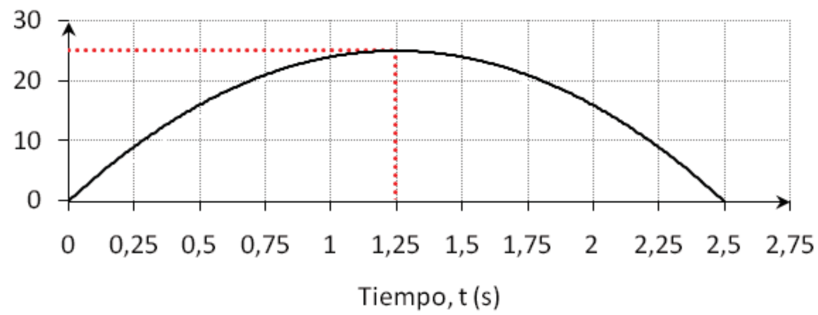
- **Coeficiente del término cuadrático:** -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).

- **Ceros o raíces:** $-16t^2 + 40t = 0$ que resolviendo dan: $x_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{5}{2}$

- **Coordenadas del vértice: V(xv ; yv)**

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-40}{2.(-16)} = \frac{5}{4} \qquad , \qquad y_v = -16.\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 40.\frac{5}{4} = 25 \qquad \Rightarrow \qquad V\left(\frac{5}{4}, 25\right)$$

- **Ordenada al origen:** $h(0) = 40.0 - 16.0^2 = 0$



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima 25 pies (y v) a los 1,25s (x v); y cae al piso a los 2,5 s (cero o raíz).

Para calcular el tiempo necesario para alcanzar una altura determinada, planteamos la ecuación cuadrática: $h(t) = -16t^2 + 40t$

$$20 = -16t^2 + 40t \quad \rightarrow \quad 0 = -16t^2 + 40t - 20$$

Entonces, las respuestas al problema son:

a) La altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 pies.

b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.

c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.

d) La pelota tarda en alcanzar 20 pies de altura, 0,69 y 1,8 segundos aproximadamente.

EJERCITACIÓN

1. En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados, a los t años está dado por:

$$N(t) = -t^2 + 21.t + 100$$

a) ¿Colocaría alguna restricción para t? ¿Por qué?

b) ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?

c) ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿cuándo ocurrirá?

d) ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?

2. El desplazamiento S de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t, está dado por:

$$S(t) = 3{,}2\ t2 - 16t + 28{,}7$$

Donde S está en metros y t en segundos

a) ¿Para qué valores de t ocurre el desplazamiento mínimo?

b) ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto?

c) ¿Cuál es el desplazamiento para t = 2?

3. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función f(z) =1.000z-2z2, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica al mes.

a) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

b) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? y ¿375 pares?

4.8. SÍNTESIS

FUNCIONES

Definición
Dado un conjunto A y un conjunto B, una función de A en B es una relación que cumple con las condiciones de **existencia** y **unicidad.**
Llamamos **x** a los elementos del conjunto A, a los elementos del conjunto B los llamamos **y**.

El **dominio de la función** es el conjunto al que pertenecen los elementos para los cuales la función está definida, es decir, es el conjunto de elementos que tienen imagen.
Dominio coincide con A.

El **conjunto imagen** es el conjunto al que pertenecen todas las imágenes de los elementos del dominio. **La imagen está incluida en B.**

Ceros o raíces son los valores de la variable independiente que pertenecen al dominio y anulan la función.

Ordenada al origen es el valor que toma la función cuando la variable independiente es cero.

FUNCIÓN AFÍN

Definición
La función afín es una función de la forma

$$f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = a\,x + b$$

Donde a y b son números reales y $a \neq 0$

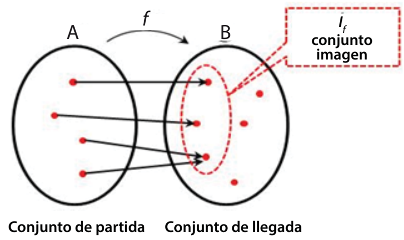
a es el coeficiente del término lineal
b es el término independiente

Cuando b = 0 la función recibe el nombre de FUNCIÓN LINEAL.

Notación funcional

$$f: D \rightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

x: variable independiente
y: variable dependiente

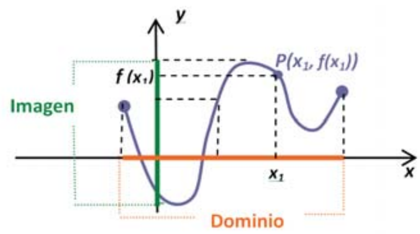


$D \equiv A$ $\quad$ $D \equiv A$

x = a es un cero o raíz de f

Si $a \in D$ y $f(a) = 0$

Si $x = 0 \in D$ $f(0) \rightarrow$ ordenada al origen



Ordenada al origen

La gráfica de una función afín es una **RECTA**

a gráficamente representa la **pendiente** de la recta

b ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas

La pendiente nos indica cuantas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, por cada unidad que aumenta la variable independiente.

Raíz

Es el valor de x que anula la función

$$f(x) = ax + b$$

$$0 = ax + b \rightarrow -b = ax \quad x = -\frac{b}{a}$$

Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

$$f(x) = ax + b$$
$$f(0) = a.0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Representación gráfica

• *A partir del valor de la pendiente y ordenada:*

Nos ubicamos en la ordenada al origen y subimos o bajamos, según el signo, la cantidad que corresponde al numerador de la pendiente. Luego hacia la derecha, corremos la cantidad de unidades que figura en el denominador de la pendiente.

• *Por tabla de valores:*

Reemplazamos dos valores de x en la expresión de la función y obtenemos su imagen, uniendo esos dos puntos graficamos la recta.

Obtención de la ecuación de la recta conocidos dos puntos

Sea $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

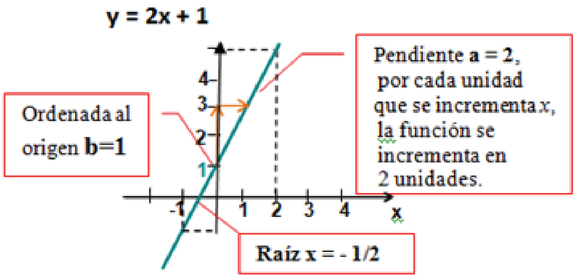
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

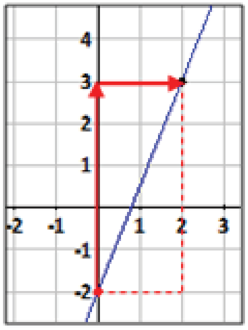
$$y - 2 = \frac{5-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x-1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



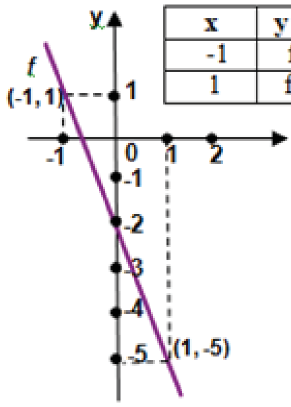


Ordenada al origen b = -2

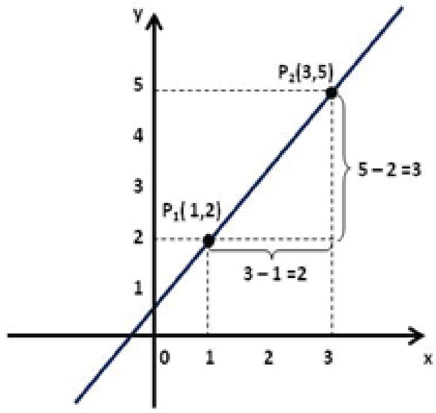
Pendiente $a = \frac{5}{2}$

Subo 5 unidades en y
Corro dos unidades a la derecha en x

$$y = \frac{5}{2}x - 2$$



x	y = -3x -2	P(x,y)
-1	f(-1)= 1	(-1,1)
1	f(1) = -5	(1, -5)



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Definición

La función cuadrática es una función de la forma **f : IR → IR**

$$\mathbf{x \rightarrow y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$

a es el coeficiente del término cuadrático
b es el coeficiente deltérmino lineal
c es el término independiente

Raíces

Son los valores de x que anulan la función. Tiene dos raíces iguales o ninguna
$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ordenada al origen

Es la imagen de la función cuando $x = 0$

$$f(x) = ax^2 + b\,x + c$$
$$f(0) = a.0 + b.0 + c \rightarrow f(0) = c$$

Representación gráfica

Eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2.a}$$

Vértice

$$V\left(\frac{-b}{2.a}, f\left(\frac{-b}{2.a}\right)\right)$$

Conjunto imagen

$a > 0$ Img f $= [\, y_v , \infty \, [$

$a < 0$ Img f $=]\!-\infty , y_v \,]$

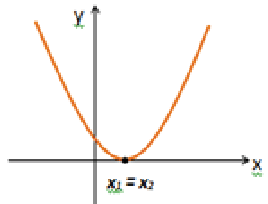
La gráfica de una función cuadrática es una **PARÁBOLA**

a gráficamente da la orientación de las ramas:
a > 0 ramas hacia arriba
a < 0 ramas hacia abajo

b dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.

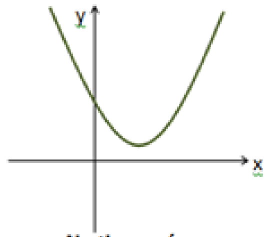
c ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas.

Gráficamente las raíces son los puntos donde la gráfica corta al eje de abscisas.



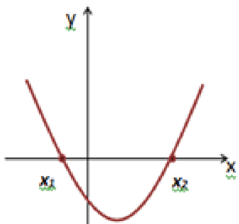
Raíces reales coincidentes

$x_1 = x_2 \rightarrow$ igual a x_v
$y_v = 0$



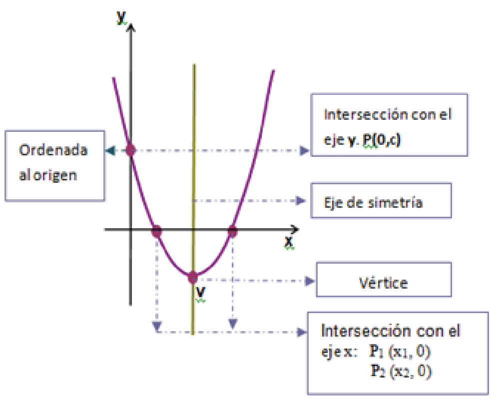
No tiene raíces reales

No hay intersección con los ejes



Raíces reales distintas

$x1 \neq x2$ hay dos puntos de intersección con los ejes



4.9. EJERCITACIÓN PARA EL ESTUDIANTE

Contenidos conceptuales

FUNCIONES

Interpretación de gráficos. Función afín. Definición y representación gráfica. Ecuación general de la recta. Función cuadrática. Definición. Representación gráfica. Problemas de aplicación.

Objetivos:

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

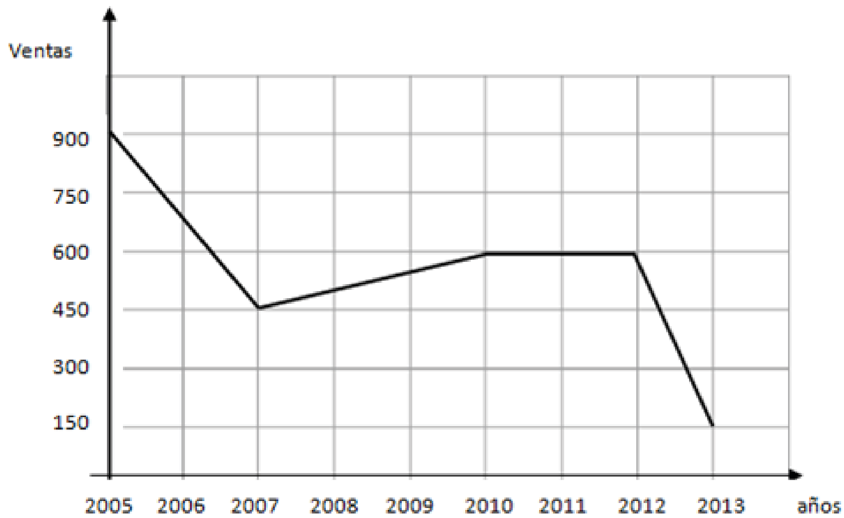
• Desarrollar habilidad para diferentes formas de expresión de función lineal y cuadrática
• Representar gráficamente funciones en ejes cartesianos
• Interpretar los contenidos en la resolución de problemas
• Desarrollar diversas estrategias para la resolución de situaciones problemáticas

FUNCIÓN AFÍN

Análisis de la función a partir de su representación gráfica.

Ejercicio 1:

El siguiente gráfico representa la cantidad vendida de televisores entre los años 2005 y 2013.



a) Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema.

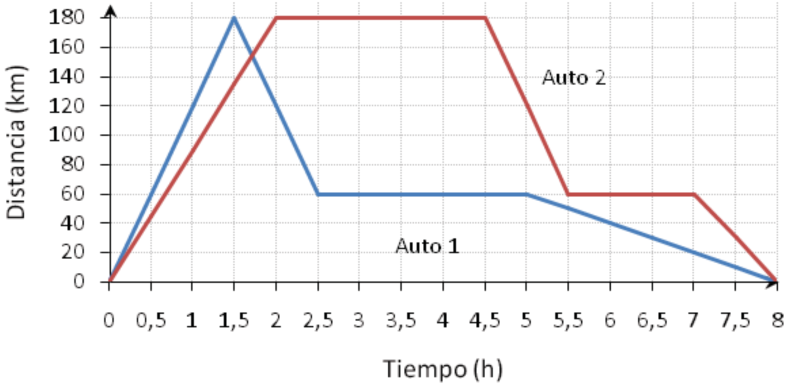
b) Cuántos televisores se vendieron en el año 2013.

c) Entre qué años las ventas se mantuvieron constantes.

d) Qué ocurrió con las ventas en el periodo 2005- 2007.

Ejercicio 2:

Las siguientes gráficas corresponden a dos autos que salen de una misma ciudad A y regresan a ella después de hacer una excursión.



a) ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

b) ¿Qué distancia recorrió cada auto durante la primera hora y media del viaje?

c) Los ocupantes de ambos vehículos se detienen a comer y a descansar. ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

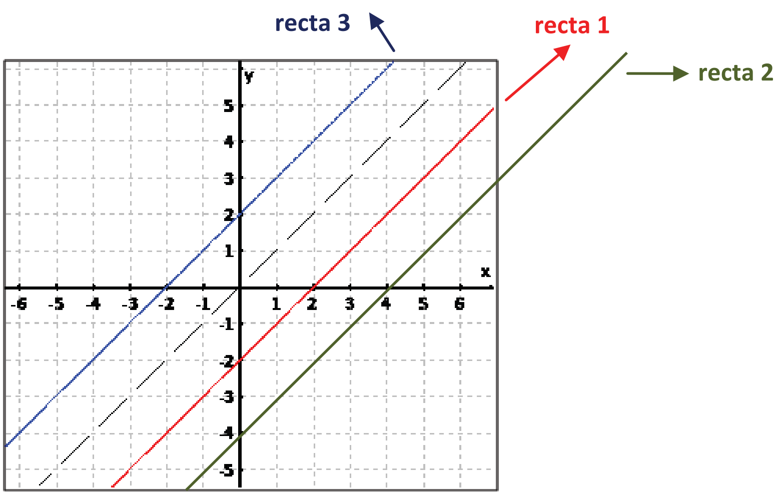
d) ¿En qué vehículo viajan los que a la vuelta de la excursión se detienen a tomar unos refrescos? ¿Durante cuánto tiempo se detienen?

e) ¿Cuántos km recorrieron durante la excursión?

Respuestas:
a) El viaje duró 8 horas.
b) Auto 1: Recorrió 180 km. Auto 2: Recorrió 130 km.
c) Se detienen durante 2,5 hs.
d) Viajan en el auto 2. Se detienen durante 1,5 hs.
e) Recorrieron 360 km.

Obtención de la ecuación de la recta a partir de un gráfico.

Ejercicio 3:



Para cada una de las rectas representadas encontrar:

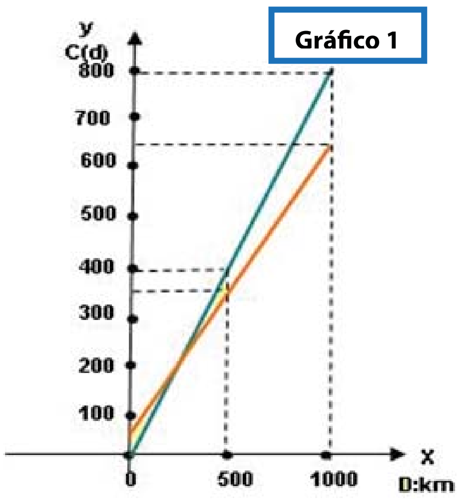
a) La ecuación.
b) La raíz.
c) La ordenada al origen.

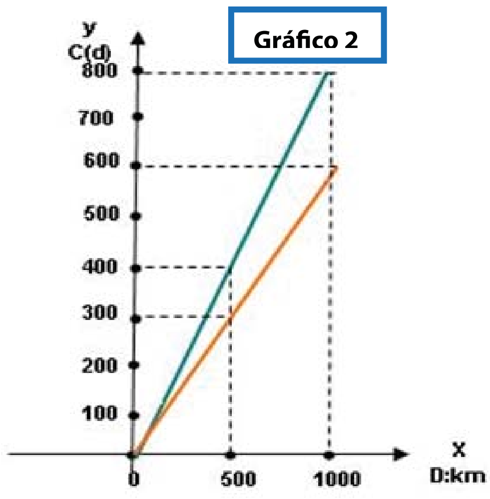
Rtas:

a) Recta 1: f(x) = x -2	Recta 2: f(x) = x	Recta 3: f(x)= x +2
b) Raíz x = 2	Raíz x = 0	Raíz x = -2
c) Ordenada y = -2	Ordenada y = 0	Ordenada y = 2

Ejercicio 4:

Matías quiere realizar un viaje de 1000 km. Para ello visita dos empresas que le brindan la siguiente información. En la primera, el costo es de \$0,8 por kilómetro recorrido y en la segunda, se paga un costo fijo de \$50 y \$0,6 por kilómetro recorrido. Es importante tener en cuenta que en ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente".





a) ¿Cuál de los dos gráficos representa el problema planteado? Justifica la respuesta
b) ¿Cuál es la ecuación de la recta corresponde a cada gráfico?
c) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

Respuestas

a) Gráfico 1. Porque una de las recta tiene ordenada al origen b = 50 que corresponde al costo fijo.

b) Primera empresa: f(x) = 0,8 x   Segunda empresa: f(x) = 0,6 x +50

c) Para las dos empresas el conjunto dominio es: D(f) =[0; 1.000]
Conjunto imagen:
Primera empresa: Im(f) = [0; 800]
Segunda empresa: Im(f) = [50; 650]

Para cada una de las rectas representadas encontrar:

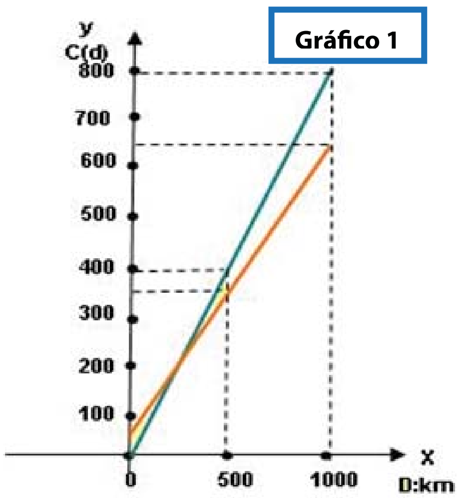
a) La ecuación.
b) La raíz.
c) La ordenada al origen.

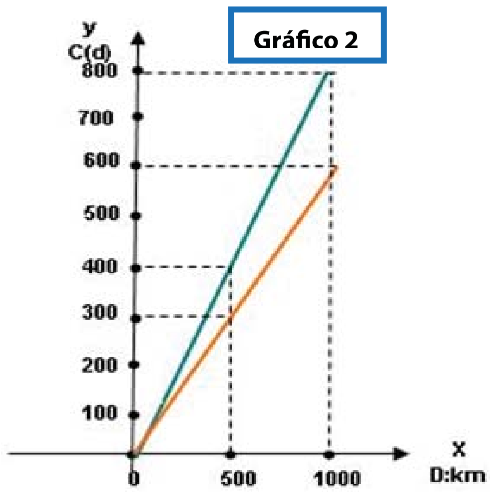
Rtas:

a) Recta 1: f(x) = x -2	Recta 2: f(x) = x	Recta 3: f(x)= x +2
b) Raíz x = 2	Raíz x = 0	Raíz x = -2
c) Ordenada y = -2	Ordenada y = 0	Ordenada y = 2

Ejercicio 4:

Matías quiere realizar un viaje de 1000 km. Para ello visita dos empresas que le brindan la siguiente información. En la primera, el costo es de $0,8 por kilómetro recorrido y en la segunda, se paga un costo fijo de $50 y $0,6 por kilómetro recorrido. Es importante tener en cuenta que en ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente".





a) ¿Cuál de los dos gráficos representa el problema planteado? Justifica la respuesta
b) ¿Cuál es la ecuación de la recta corresponde a cada gráfico?
c) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?

Respuestas

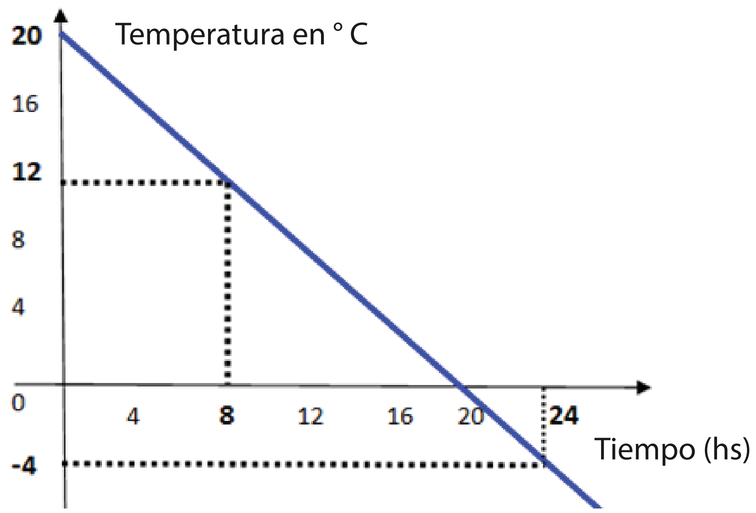
a) Gráfico 1. Porque una de las recta tiene ordenada al origen b = 50 que corresponde al costo fijo.

b) Primera empresa: f(x) = 0,8 x   Segunda empresa: f(x) = 0,6 x +50

c) Para las dos empresas el conjunto dominio es: D(f) =[0; 1.000]
Conjunto imagen:
Primera empresa: Im(f) = [0; 800]
Segunda empresa: Im(f) = [50; 650]

Ejercicio 5:

El siguiente gráfico representa la temperatura medida en un laboratorio de una cierta sustancia durante 24 hs.



a) ¿Cuál es el conjunto dominio y el conjunto imagen en el contexto del problema?
b) ¿Qué temperatura se registró al inicio de la medición?
c) ¿En algún momento la temperatura fue de cero grado?
d) ¿Qué significado tiene la pendiente de la recta?
e) ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa gráficamente la situación planteada?
f) ¿Qué temperatura se registró a las 3 y media de la mañana?

Respuestas:

a) Conjunto dominio D(f) = [0; 24]. Conjunto imagen Im(f) = [-4; 20].
b) En t = 0, se registraron 20° c.
c) A las 20 hs. La temperatura fue de cero grado.
d) La pendiente de la recta es a = -1, significa que la temperatura disminuye 1°C cada hora.
e) La ecuación de la recta es: $f(x) = -x + 20$
f) Se registraron 16,5 ° C.

Representación de la función afín por tabla de valores.

Ejercicio 6:

Dadas las siguientes funciones:
$f(x) = -5x + 10$
$g(x) = 3x - 8$

a) Asignar dos valores a x para construir una tabla
b) Graficar
c) Determinar: pendiente, ordenada al origen y raíz

Ejercicio 7:

Indicar los pares ordenados que pertenecen a la recta $y = \frac{3}{5}x + 9$

a) (-5; -6) **b)** (- 2; 39/5) **c)** (3; 18) **d)** (4; 3) **e)** (10/3; 11)

Respuesta: b) y e)

Ejercicio 8:

Encuentre la fórmula para calcular la cantidad de vino que queda cada día en una pileta de la que se sacan de manera uniforme, siendo la cantidad inicial de 2300 litros y los datos diarios son los siguientes:

Día	1	2	3
Litros de vino	2250	2200	2150

a) Si se continúan sacando 50 litros por día, ¿en cuántos días se vacía la pileta?
b) ¿Cuándo le quedarán 1300 litros?

Respuestas:

La fórmula que me permite calcular la cantidad de vino es $f(x) = -50x + 2.300$

a) La pileta se vacía en 46 días.
b) A los 20 días le quedarán 1.300 litros

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejercicio 9:

Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas

a) $f(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = 4 - x^2$

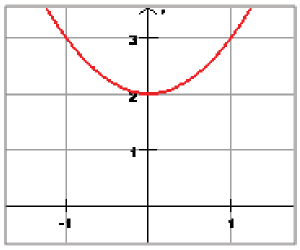
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

- Encuentre su conjunto imagen
- Calcule sus ceros o raíces.
- Indique intersección con el eje "y".
- Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
- Represéntelas gráficamente.

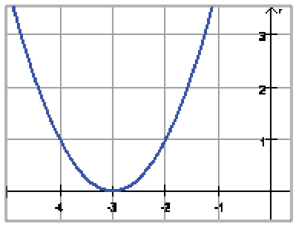
Respuestas:

a) $f(x) = x^2 + 2$



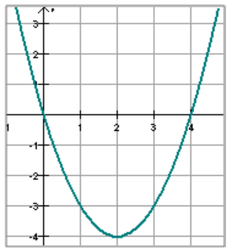
- Conjunto imagen $[2; \infty[$
- Ceros o raíces: no tiene raíces reales
- Ordenada al origen $c = 2$
- Vértice (0; 2)   Eje de simetría: recta $x = 0$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$



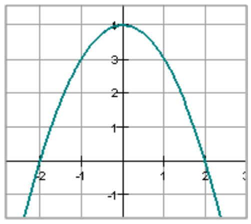
- Conjunto imagen $[0; \infty[$
- Ceros o raíces: $x1 = x2 = -3$
- Ordenada al origen $c = 9$
- Vértice (-3; 0)   Eje de simetría: recta $x = -3$

c) $f(x) = x^2 - 4x$



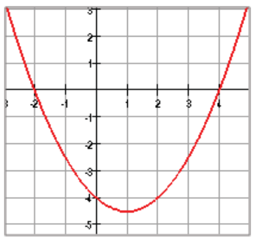
- Conjunto imagen $[-4; \infty[$
- Ceros o raíces: $x1 = 0$ $x2 = 4$
- Ordenada al origen $c = 0$
- Vértice (2; -4)   Eje de simetría: recta $x = 2$

d) $f(x) = 4 - x^2$



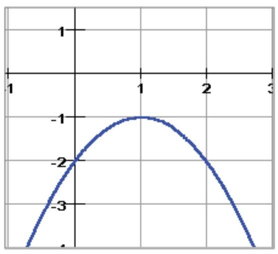
- Conjunto imagen $]-\infty; 4]$
- Ceros o raíces: $x1 = -2$ $x2 = 2$
- Ordenada al origen $c = 4$
- Vértice (0; 4)   Eje de simetría: recta $x = 0$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$



- Conjunto imagen $[-9/2; \infty[$
- Ceros o raíces: $x1 = -2$ $x2 = 4$
- Ordenada al origen $c = -4$
- Vértice (1; 9/2)   Eje de simetría: recta $x = 1$

f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$



- Conjunto imagen $]-\infty; -1]$
- Ceros o raíces: no tiene raíces reales
- Ordenada al origen $c = -2$
- Vértice (1; -1)   Eje de simetría: recta $x = 1$

Ejercicio 10:

Los ingresos mensuales en una fábrica de máquinas electromecánicas están dados por la función: $f(x) = 100x - 2x^2$
Observar el gráfico y responder:

a) ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
b) Si decimos que el ingreso fue de \$1000 aproximadamente ¿Cuántas máquinas se fabricaron?
c) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 40 máquinas?
d) ¿A partir de qué cantidad de máquinas se comienza a tener pérdida? ¿Tiene relación con las raíces? Justifique su respuesta.

Matemática
Ingreso 2017

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO