Ingreso 2017

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Autoridades de la UNCuyo

Rector
Ing. Agr. Daniel Ricardo Pizzi

Vicerrector
Dr. Prof. Jorge Horacio Barón

Secretaria Académica
Prof. Esp. Adriana García

Autoridades del ITU

Directora General
Lic. Prof. Mariana Castiglia

Secretaria de Extensión y Relaciones Institucionales
Lic. Adriana Defacci

Secretario de Administración y Finanzas
Cdor. Pedro Suso

Responsable del Área de Gestión Pedagógico-Didáctica
Lic. Prof. Eleonora Valdivieso

Directores y coordinadores

Área de Tecnologías de la Producción
Ing. José Biurriarena

Mendoza
Ing. Jorge García Guibout

Dra. Selva Rodríguez
Ing. Gloria Tutera
Lic. Diana Dominguez
AUS. Martín Silva
Ing. Alejandro Fernández

Luján de Cuyo
Mgter. Nora Metz

Rivadavia
Lic. Guillermo Barta

San Martín
Lic. Eduardo Ferrer

General Alvear
Ing. Walter López

San Rafael
Cdor. Gerardo Canales

Tunuyán
Cdor. Oscar Niemetz

Coordinación de ingreso 2017
Esp. Marianela Aveni Metz

Equipo de producción de materiales de Matemática
Prof. Norma Castellino
Prof. Cecilia Faccendini
Prof. Graciela Martín
Ing. Patricia Weidmann

Diseño de cubierta e interior
D.G. Noelia Díaz Puppato
D.G. Eduardo A. Lentini

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

MÓDULO 5

Matemática

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO

Índice

TRIGONOMÉTRIA

Contenidos conceptuales

Sistema de medición de ángulos: sexagesimal y radial. Triángulos rectángulos: funciones trigonométricas, teorema de Pitágoras y propiedades de ángulos interiores. Triángulos Oblicuángulos: teorema del seno y del coseno.

Objetivos

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

• Expresar ángulos en sistema sexagesimal y radial
• Aplicar las funciones trigonométricas , el teorema de Pitágoras y ángulos complementarios en triángulos rectángulos
• Usar convenientemente el teorema del seno , del coseno y propiedades de los ángulos interiores en triángulos oblicuángulos
• Resolver situaciones problemáticas diferenciando triángulos rectángulos y oblicuángulos

5. Trigonometría

La palabra trigonometría significa, etimológicamente, "medición de triángulos". En efecto "tri" significa tres, "gonos" significa ángulo y "metrón" significa medición o medida. Por lo tanto la trigonometría estudia la medición o resolución de triángulos.
Sus primeras aplicaciones fueron en el campo de la navegación y la astronomía. Hoy tiene muy diversos usos, tales como medir la altura de una torre, mástil, edificio, montaña; o de los motores rotativos; calcular la velocidad con que se acerca un bote a la orilla, mientras se observa desde la cima de un acantilado; medir arcos de circunferencia...
Las funciones trigonométricas son de gran utilidad para modelar y describir fenómenos que se repiten periódicamente o en forma cíclica,con una gran aproximación.

5.1. Sistemas de medición de ángulos

Sabemos que existen distintos sistemas de medición de ángulos, en esta unidad trabajaremos solamente con los sistemas sexagesimal y radial.

5.1.1. SISTEMA SEXAGESIMAL

Definición

La unidad de medida de amplitud angular, se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90°

Serán útiles las siguientes equivalencias:

$$1^{\circ} = \frac{\text{amplitud ángulo de un giro}}{360}$$

$$1 \text{ minuto: } 1' = \frac{1^{\circ}}{60}$$

$$1 \text{ segundo: } 1'' = \frac{1'}{60}$$

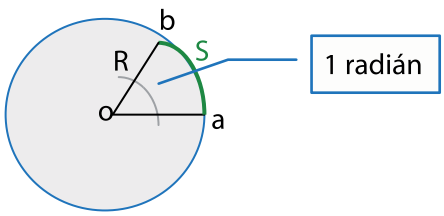
$$\Rightarrow \boxed{1^{\circ} = 60' = 3600''}$$

5.1.2. SISTEMA RADIAL O CIRCULAR

Definición

En el sistema radial los ángulos se miden en radianes, y la unidad que se usa es **1 radián**
Un radián es la medida del ángulo central que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma

$$\text{med } \overline{oa} = \text{med } \widehat{ba}$$



5.1.3. EQUIVALENCIA ENTRE LOS DOS SISTEMAS

Teniendo en cuenta la definición anterior, el valor de un ángulo de un giro es de 2 π radianes.
La equivalencia entre los dos sistemas se muestra en la siguiente tabla:

Sistema sexagesimal (grados)	**Sistema radial** (radianes)
90º	π /2
180º	π
360º	2 π

La tabla se basa en:

a) $\frac{\pi}{180^{\circ}} = 1$ teniendo en cuenta la relación $\rightarrow 180^{\circ} = 180^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} = \pi$

(se han simplificado los grados)

b) $\frac{180^{\circ}}{\pi} = 1$ teniendo en cuenta la relación $\rightarrow \pi = \pi \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = 180^{\circ}$

(se han simplificado los radianes)

¡Cuidado!...se trata de medidas de amplitudes angulares, por esto en las equivalencias debe trabajar con π y no reemplazarlo por 3,14159…

POR EJEMPLO

• Exprese 135° en el sistema radial
Multiplicando 135° por una de las fracciones unitarias convenientemente elegida, se tiene: $135° = 135° \cdot \frac{\pi}{180°}$ y se puede observar que: $\frac{135°}{180°} = \frac{3}{4}$
Con esto $135° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{3}{4}\pi$

• Para tener el equivalente de $\frac{5\pi}{3}$ en sistema sexagesimal, se multiplica por la fracción unitaria conveniente: $\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 300°$

• 0,846 rad : Si multiplica por la misma fracción unitaria anterior

$0{,}846 \text{ rad} = 0{,}846 \frac{180°}{\pi} = 48{,}472229\ldots$

Como obtiene un número con una parte decimal de grados, hay que llevarlo a minutos y segundos. Si en la calculadora oprime Shift o Inv, y ° ′ ″ aparecerá en la pantalla: 48°28′20″.

Entonces:
$0{,}846 \text{ rad} = 48{,}472229\ldots° \cong 48°28'20''$

EJERCITACIÓN

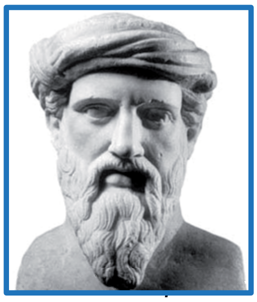
1. En cuentre la equivalencia en grados sexagesimales de los siguientes ángulos medidos en radianes:

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7}{6}\pi$
$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\pi}{18}$	$-\frac{11}{12}\pi$

2. Represente los ángulos cuyas medidas son las indicadas y halle el equivalente en sistema circular:

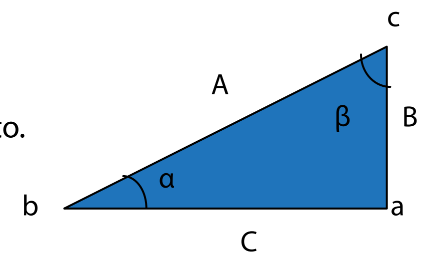
180°	45°	270°	135°
360°	720°	765°	-75°

5.2. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo



Pitágoras
(Isla de Samos, actual Grecia, h. 572 a.C. - Metaponto, hoy desaparecida, actual Italia, h. 497 a.C.)
Filósofo y matemático griego. Aunque su nombre se halla vinculado al teorema de Pitágoras y la escuela por él fundada dio un importante impulso al desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia, la relevancia de Pitágoras alcanza también el ámbito de la historia de miento, teñido todavía del misticismo y del esoterismo de las antiguas religiones mistéricas y orientales, inauguró una serie de temas y motivos que, a través de Platón, dejarían una profunda impronta en la tradición occidental.

En todo triángulo rectángulo:



• La hipotenusa es el lado que se opone al ángulo recto.
• Los catetos son los lados que se oponen a los ángulos agudos, es decir son los lados que forman el ángulo recto

• Los ángulos agudos son complementarios ($\alpha + \beta = 90°$)

Para trabajar con razones trigonométricas debemos tener en cuenta el siguiente teorema.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Definición

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2}$$

Definimos las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida del cateto adyacente}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida del cateto adyacente}}$$

Observe que según lo definido, hay una relación entre las diferentes razones analizadas:

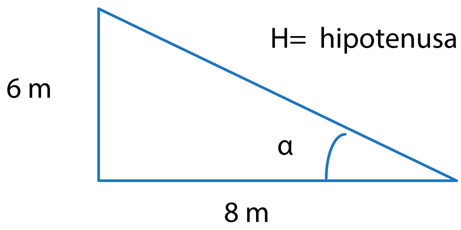
$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

El seno y coseno de un ángulo están relacionados por la llamada **identidad Pitagórica**

$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

POR EJEMPLO

Si el cateto adyacente mide 8 m, el cateto opuesto 6m, calcular las razones trigonométricas del ángulo **α.** Con los datos, graficamos el triángulo



Por Teorema de Pitágoras:

$$H = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{6 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 0{,}75$$

Dadas las funciones trigonométricas es posible calcular el ángulo que corresponde al valor de dichas funciones, para ello nos valemos de las correspondientes" Funciones inversas"

• arcsen α ⟶ función inversa del sen α, se simboliza $\text{sen}^{-1}\alpha$ donde la notación -1 hace referencia a la función inversa.

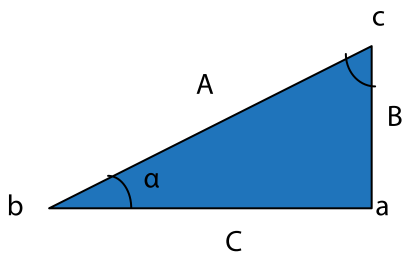
De la misma manera:
• arcos α = $\cos^{-1}\alpha$
• arctg α = $\text{tg}^{-1}\alpha$

POR EJEMPLO

1. Calcular el ángulo α, sabiendo que el **sen α = 0,506**
Resolviendo con la función inversa en la calculadora (SHIFT sin) nos da un ángulo α = 30,3977 que corresponde a 30° 23′ 51″

2. Si en un triángulo rectángulo A = 15 cm y b= 28º12′34″.
Calcular el valor de C

Tomando los datos y la incógnita se obtiene la función trigonométrica:



cos α = C C = A . cosα = 15 cm .cos 28º12’34 A
C = 13,22 cm

3. Si en un triángulo rectángulo C = 12 cm y A = 28 cm. Calcular el valor de B
En este caso al tener un cateto y la hipotenusa se debe aplicar el teorema de Pitágoras

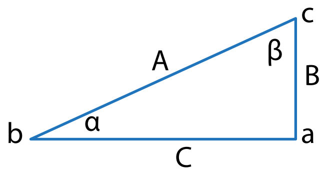
$$A^2 = B^2 + C^2 \text{ despejando } C = \sqrt{A^2 - B^2} \quad C = \sqrt{28^2 - 12^2} = 25{,}30 \text{ cm}$$

IMPORTANTE:
Es conveniente ocupar SIEMPRE los datos para la resolución de cualquier incógnita eso evita arrastrar errores.

EJERCITACIÓN

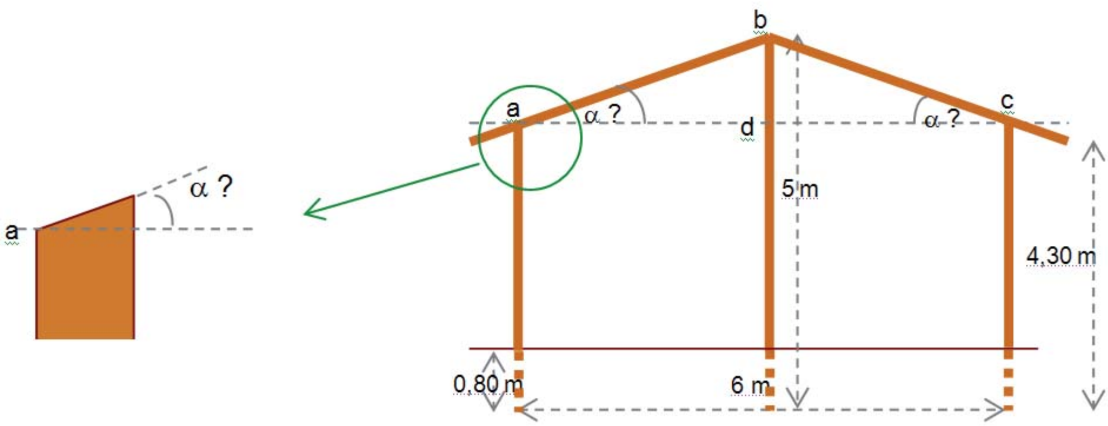
1. A partir de la figura y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, completa lo que se pide:

a) sen α=
b) cos α=
c) tan α=



d) sen β=
e) cos β=
f) tan β=

2. Se quiere construir un quincho de madera, se han comprado varios tirantes para el techo y 6 postes para colocar como columnas: dos de ellos miden 5 m cada uno y los otros cuatro miden 4,30 m cada uno. La base del quincho deberá tener forma rectangular, de 6 m por 3 m y la inclinación del techo será a “dos aguas”. Se colocarán dos hileras de 3 postes cada una en el contorno del rectángulo de la base y los dos postes centrales estarán más altos que los cuatro de las orillas, Los que deberán ser enterrados 80 cm. La altura del quincho deberá ser la mayor posible. Para que los tirantes del techo tengan un contacto plano con los postes de las orillas, se cortará el extremo libre de estos últimos, con una cierta inclinación. Calcular cuánto debe medir el ángulo con el que se van a cortar los extremos libres de esos postes.
Representamos el problema en el siguiente gráfico:



Antes de intentar resolver este problema, léalo nuevamente e identifique lo que se le pide calcular, los datos "relevantes" y los que no lo son. Observando el esquema responda

a) Los triángulos rectángulos que puede identificar son……………….

b) El cateto opuesto al ángulo **α** es…………….. y mide……………

c) El cateto adyacente al ángulo **α** es……………. y mide…………..

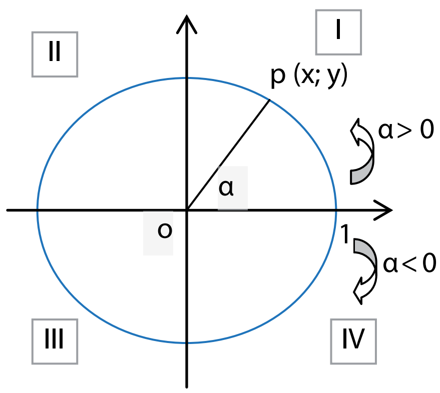
d) La razón trigonométrica que relaciona estos catetos es………………..

e) La amplitud angular de **α** es………………….

5.2.1. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

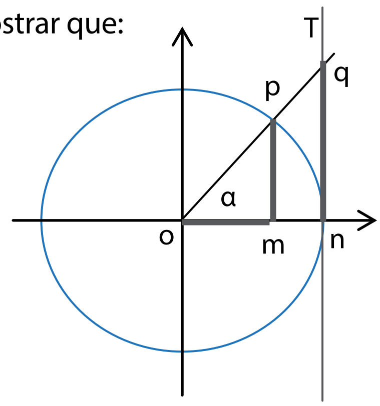
La circunferencia trigonométrica, también llamada goniométrica, es la que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio mide una unidad.
Resulta particularmente útil para encontrar relaciones entre razones trigonométricas de un mismo ángulo, de ángulos distintos, para graficar las funciones trigonométricas o resolver ecuaciones trigonométricas.

En esta circunferencia se cumple que:



Si un punto *p* de coordenadas (x, y) se desplaza girando sobre la circunferencia, la semirrecta que contiene al segmento $\overline{op}$ determina un ángulo α con la dirección positiva del eje x. Si este punto *p* gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (sentido antihorario), el ángulo α es positivo; y si *p* gira en el mismo sentido (horario), α es negativo.
Los ejes "x" e "y" separan el plano en cuatro cuadrantes que se indican con los números romanos I, II, III y IV.
Por semejanza de los triángulos pôm y qôn se puede demostrar que:

- la abscisa de *p*(segmento $\overline{om}$) representa al cos α
- la ordenada de *p*(segmento $\overline{pm}$) representa al sen α
- el segmento $\overline{qn}$ representa la tan α.



Signo de las funciones trigonométricas

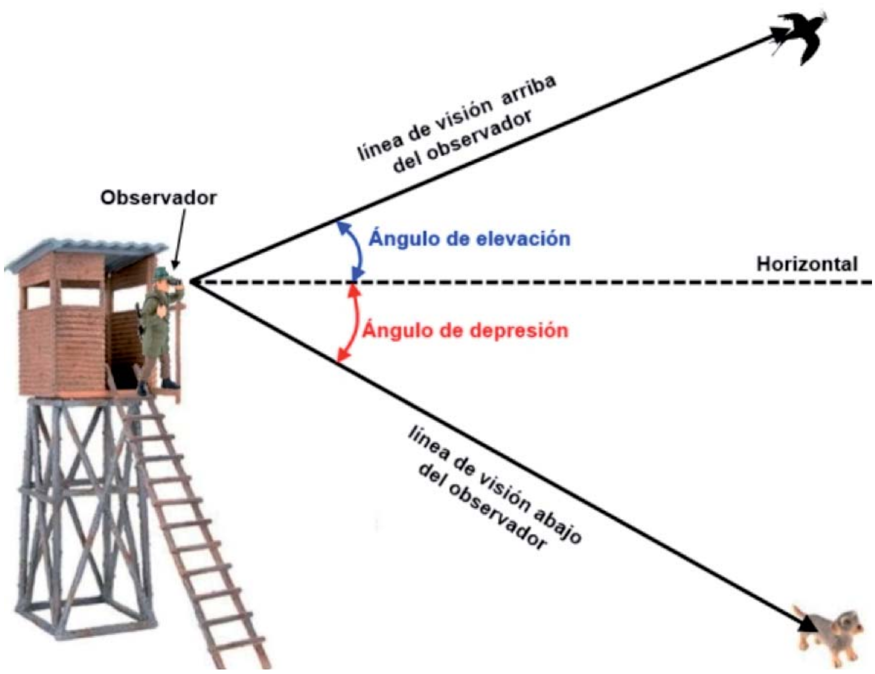
cuadrante	sen α	cos α	tg α
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

5.2.2. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Para resolver los problemas debemos tener en cuenta

- Se llama visual a la recta que, partiendo del ojo del observador va hacia el objeto observado.
- Se llama horizontal a la recta que, partiendo del ojo del observador es paralela al horizonte
- Se llama ángulo de elevación al que forma la horizontal con la visual que se halla por encima de la horizontal.
- Se llama ángulo de depresión al que forma la horizontal con la visual que se halla por debajo de la horizontal.

Las definiciones anteriores se representan en el siguiente dibujo:



Para resolver los siguientes ejercicios se aconseja graficar

EJERCITACIÓN

1. Un poste de teléfono está sujeto por medio de varios cables que parten del extremo superior. Uno de estos cables está atado a una estaca situada a 5 m del poste y forma con la horizontal un ángulo de 60°. ¿Cuál es la altura del poste y la longitud del cable? (redondear a la centésima).

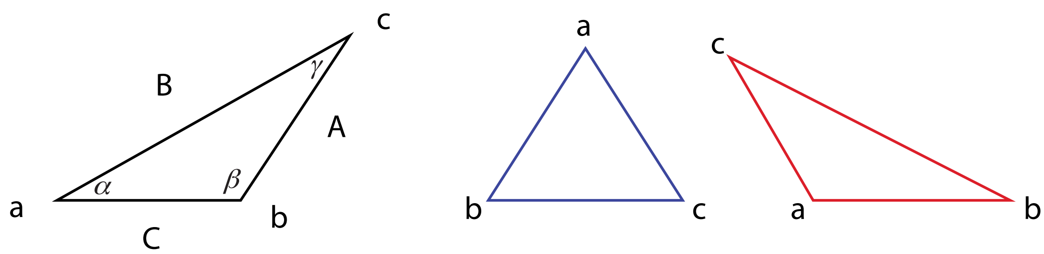
2. Calcula la superficie de un campo rectangular sabiendo que un alambre que lo atraviesa diagonalmente tiene una longitud de 649 m y forma con uno de sus lados limítrofes un ángulo de 37°26'.

3. Se enfoca la parte superior de un edificio con un teodolito colocado en un trípode de 1,20 m de altura y ubicado a una distancia de 50 m de la base del edificio. El teodolito marca un ángulo de elevación de 61° ¿Cuál es la altura de un edificio?

4. Desde un avión que vuela a 2.000 m sobre el océano, el ángulo de depresión de la costa de una isla, es de 23°. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer el avión para estar justo sobre ese punto de la costa?

5.3. Teoremas importantes en triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando ningún ángulo interior es recto.
Son ejemplos de triángulos oblicuángulos, los representados en las siguientes figuras:



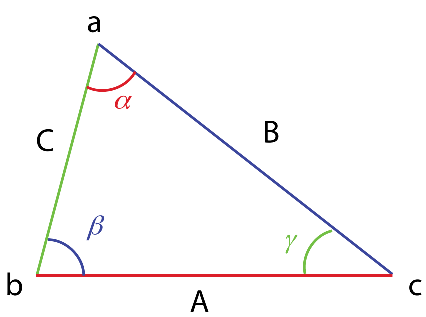
Como no hay un ángulo recto, no se puede aplicar funciones trigonométricas por lo tanto debemos acudir a dos teoremas importantes de la trigonometría:

5.3.1. TEOREMA DEL SENO

Definición

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{A}{sen\,\alpha} = \frac{B}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{C}{\mathrm{sen}\,\gamma}$$



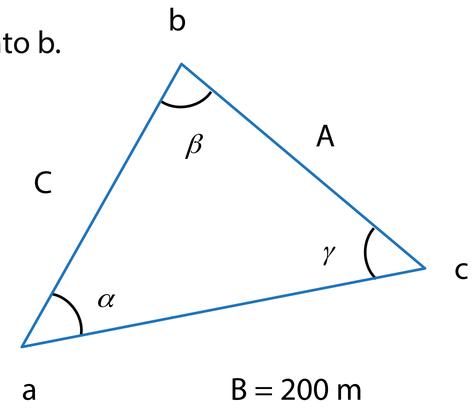
APLICACIÓN

El teorema del seno es utilizado para resolver problemas en los que se conocen dos ángulos del triángulo y un lado opuesto a uno de ellos. También se usa cuando conocemos dos lados de un triángulo y un ángulo opuesto a uno de ellos.

POR EJEMPLO

Calcula la distancia que separa el punto a del punto b.

Llamamos:
$\alpha = 61° \, 28'$
$\gamma = 54° \, 53'$



Vemos que la distancia entre a y b es el lado C. Debemos conocer entonces el ángulo β para aplicar el teorema. Con los datos podemos utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ por lo tanto $\beta = 180 - \gamma - \alpha$

$\beta = 180° - 61°28' - 54°53' = 63°39'$

Aplicando el teorema del seno nos queda

$$\frac{A}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta} = \frac{C}{\text{sen}\,\gamma} \qquad C = \frac{B\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\beta} = \frac{200\text{m} \,.\, \text{sen}\, 54°53'}{\text{sen}\, 63°\,39'} = 182{,}565\text{m}$$

5.3.2. TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos no rectángulos.

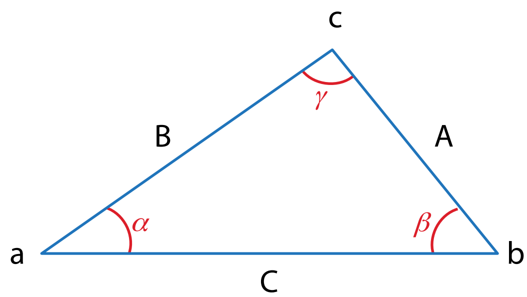
Definición

Un lado al cuadrado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo que ellos forman.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos\,\alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2 \,.\, A \,.\, C \,.\, \cos\,\beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \,.\, A \,.\, B \,.\, \cos\,\gamma$$

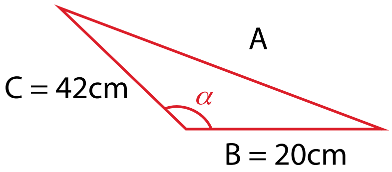


POR EJEMPLO

Dado un triángulo oblicuángulo donde $B = 20$ cm $C = 42$ cm y el ángulo que forman es de 120º. Calcular el lado A

1º Se realiza el esquema de la situación planteada

Donde $\alpha = 120^\circ$



2º Con los datos se aplica el teorema del coseno

$$\mathbf{A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos \alpha}$$

3º Se reemplazan los datos

$$A = \sqrt{(20\text{ cm})^2 + (42\text{ cm})^2 - 2 \cdot 20\text{ cm} \cdot 42\text{ cm} \cdot \cos 120^\circ} = 54{,}81\text{ cm}$$

POR EJEMPLO

1. Si en un triángulo oblicuángulo $A = 24$ cm , $B = 18$ cm $\beta = 42°12'54''$. Calcular α

Debo utilizar el teorema del seno $\dfrac{A}{\text{sen }\alpha} = \dfrac{B}{\text{sen }\beta}$

entonces $\dfrac{24\text{ cm}}{\text{sen }\alpha} = \dfrac{18\text{ cm}}{\text{sen } 42^\circ\, 12'\, 54''}$ despejando $\text{sen}\alpha = \dfrac{24\text{ cm} \,.\, \text{sen } 42^\circ\, 12'\, 54''}{18\text{ cm}}$

por lo tanto para calcular $\alpha = \text{arc sen } 0{,}8958860 = 63°37'21''$

2. Si en un triángulo oblicuángulo $A = 18$ cm $B = 25$ cm $\gamma = 28°34'16''$ Calcular C

Debo utilizar el teorema del coseno $C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\, A \,.B \,.\cos \gamma}$

$$C = \sqrt{18^2 + 25^2 - 2 \,.\, 18.\, 25 \,.\cos 28°34'16''} = 12{,}59\text{ cm}$$

EJERCITACIÓN

1. De un triángulo sabemos que: $A = 6$ m, $\beta = 45°$ y $\gamma = 105°$. Calcula los restantes elementos.

2. Resuelve el triángulo de datos: $a = 30°$, $A = 3$ m y $B = 6$ m

3. Resuelve el triángulo de datos: $A = 15$ m, $B = 22$ m y $C = 17$ m.

4. Tres pueblos **a**, **b** y **c**, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre **a** y **b** es de 6 Km; a los pueblos **b** y **c** los separan 9 Km. El ángulo que forman las carreteras que conectan **a** con **b** y **b** con **c** es de 120°. ¿Qué distancia hay entre el pueblo **a** y el pueblo **c**

5.4. Sintesis

Sistema sexagesimal

La unidad de medida de amplitud angular, se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90°

$$1° = \frac{\text{amplitud ángulo de un giro}}{360}$$

$$\text{1 minuto: } 1' = \frac{1°}{60}$$

$$\text{1 segundo: } 1'' = \frac{1'}{60}$$

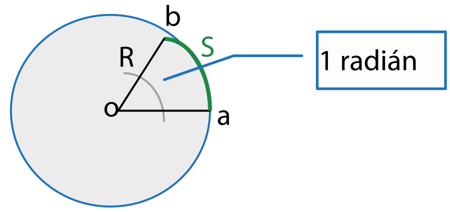
$$1° = 60' = 3600''$$

Sistema radial o circular

En el sistema radial los ángulos se miden en radianes, y la unidad que se usa es **1 radián**

Un radián es la medida del ángulo central que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma

$$\text{med } \overline{oa} = \text{med } \overset{\frown}{ba}$$



Equivalencia entre los dos sistemas

Se construye una tabla que se basa en:

a) $$\frac{\pi}{180°} = 1 \rightarrow 180° = 180° \frac{\pi}{180°} = \pi$$

b) $$\frac{180°}{\pi} = 1 \rightarrow \pi = \pi \frac{180°}{\pi} = 180°$$

Sistema sexagesimal (grados)	**Sistema radial** (radianes)
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π

Ejemplo:

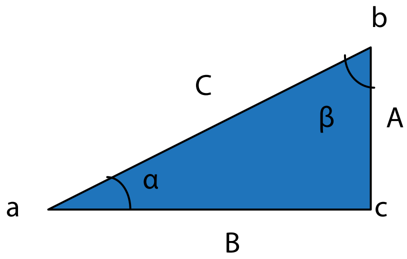
Pasar $\frac{3}{4}\pi$ al sistema centesimal es

$$\frac{3}{4}\pi \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3 \cdot 180}{4} = 135°$$

Triángulo rectángulo

En todo triángulo rectángulo:

- La hipotenusa es el lado que se opone al ángulo recto → C
- Los catetos son los lados que se oponen a los ángulos agudos, es decir son los lados que forman el ángulo recto → A y B
- Los ángulos agudos son complementarios ($\alpha + \beta = 90°$)



Para calcular los elementos de un triángulo rectángulo se recurre a:

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2}$$

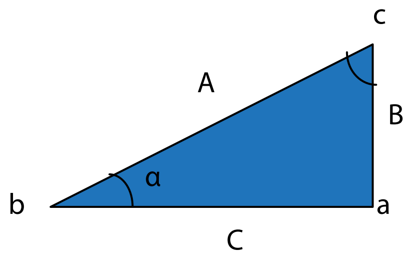
A las funciones trigonométricas

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida del cateto adyacente}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida del cateto adyacente}}$$

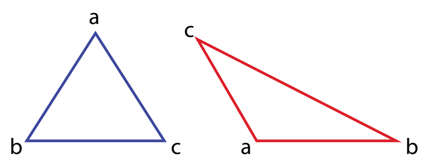
Si en un triángulo rectángulo A = 15 cm y α= 28º12’34”. Calcular el valor de C



cos α= C / A → C = A cos α
C = 15cm .cos 28º 12’ 34” = 13,22cm

Triángulo oblicuángulo

Definición:
Un triángulo es oblicuángulo cuando ningún ángulo interior es recto

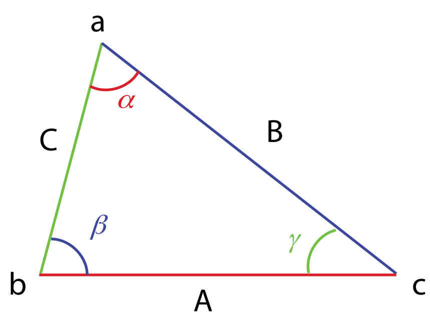


Para calcular los elementos de un triángulo oblicuángulo se recurre a:

Teorema del seno

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{A}{sen\,\alpha} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{sen}\,\gamma}$$



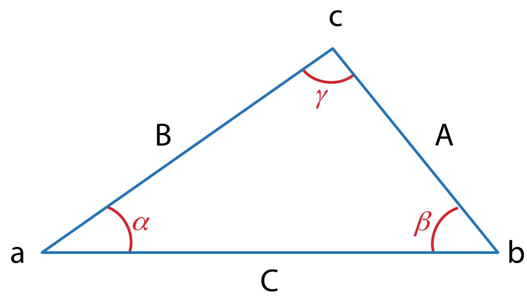
Teorema del coseno

Un lado al cuadrado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo que ellos forman.

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \,.\, B \,.\, C \,.\, \cos\ \alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2 \,.\, A \,.\, C \,.\, \cos\ \beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \,.\, A. \,B \,.\, \cos\ \gamma$$



Si en un triángulo oblicuángulo $A = 24\text{cm}$, $B = 18\text{ cm}$ $\beta = 42°12'54''$.
Calcular α

Por teorema del seno

Entonces $\dfrac{24\text{ cm}}{\text{sen }\alpha} = \dfrac{18\text{ cm}}{\text{sen } 42°\ 12'\ 54''}$

$$\text{sen}\alpha = \frac{24\text{ cm} \,.\, \text{sen } 42°\ 12'\,54''}{18\text{ cm}}$$

α = arc sen 0,8958860 = 63º37'21''

5.5. Ejercitación para el estudiante

Contenidos conceptuales

Sistema de medición de ángulos: sexagesimal y radial. Triángulos rectángulos: funciones trigonométricas, teorema de Pitágoras y propiedades de ángulos interiores. Triángulos Oblicuángulos: teorema del seno y del coseno.

Objetivos

Al finalizar el módulo el estudiante será capaz de:

- Expresar ángulos en sistema sexagesimal y radial
- Aplicar las funciones trigonométricas , el teorema de Pitágoras y ángulos complementarios en triángulos rectángulos
- Usar convenientemente el teorema del seno , del coseno y propiedades de los ángulos interiores en triángulos oblicuángulos
- Resolver situaciones problemáticas diferenciando triángulos rectángulos y oblicuángulos

Ejercicio 1

Pasar los siguientes ángulos al sistema radial

a) 36° =   b) 45° =   c) 135° =   d) 230° =

Ejercicio 2

Pasar los siguientes ángulos al sistema sexagesimal

a) $0,25\ \pi =$ b) $8/3\ \pi$ c) $2,5\ \pi$ d) $4,2\ \pi$

Ejercicio 3

Si en un triángulo rectángulo B = 15 cm y $\gamma = 27°35'40''$. Calcular: A y C
Rta: 16,93 cm y 7,84 cm respectivamente

Ejercicio 4

Si en un triángulo rectángulo A = 25 cm y B = 16 cm . Calcular: C , β
Rta: 19,21 cm y 39°47'30"

Ejercicio 5

Una escalera está apoyada sobre una pared a 4m de altura, si el ángulo que forma la escalera con el piso es de 60° . Calcular la altura de la escalera.
Rta: 4,62m

Ejercicio 6

Una persona se encuentra a 15 m de una torre y ve la parte superior de la torre bajo un ángulo de elevación de 32°15'45". Calcular la altura de la torre.
Rta: 9,47 m

Ejercicio 7

El piloto de un avión a 7000 m de altura divisa un lago con un ángulo de depresión de 48°27'8". Calcular la distancia avión – lago.
Rta: 9.353,25m

Ejercicio 8

Un rectángulo tiene de base 38m y su diagonal mide 63m. Calcular su altura.
Rta: 50,25 m

Ejercicio 9

Un poste se quiebra formando la parte superior con la inferior un ángulo de 26°35'43". Si la parte superior toca el suelo a una distancia de 3 m con la parte inferior. Calcular la altura del poste.
Rta: 12,69 m

Ejercicio 10

Una varilla de 4 m de altura proyecta una sombra. La oblicuidad de los rayos del sol con el piso es de 34°12'. Calcular la longitud de la sombra.
Rta: 5,88 m

Ejercicio 11

Una columna sostiene una estatua, un observador parado a 12m de ella observa la parte superior de la estatua bajo un ángulo de elevación de 56° y la parte inferior bajo un ángulo de elevación de 36°. Calcular la altura de la estatua.
Rta: 9,07 m

Ejercicio 12

Dos puntos de referencia a y b, ubicados sobre la margen de un río, se hallan a 20 km. de distancia uno del otro. Para calcular a que distancia está estos de C, ubicado a la otra margen del río, se han determinado las siguientes medidas de los ángulos bac = 82° y abc = 38°. ¿Cuáles son las distancias buscadas?
Rta: 22,87 km y 14,22 km

Ejercicio 13

Una casa se encuentra a 18 m de un árbol, en otra dirección, éste se encuentra a 15 m de una plaza Si la distancia casa – plaza es de 9 m. Calcular el ángulo que forma el árbol con la plaza y la casa.
Rta: 29°55'35"

Ejercicio 14

En un triángulo la base es de 86 cm y de sus ángulos adyacentes mide 32°27'y el ángulo opuesto a la base 68°39' Calcular el lado opuesto al ángulo adyacente.
Rta: 49,54 cm

Ejercicio 15

Un camión es tirado por dos cuerdas de 8 m y 12 m cada una. Si la distancia entre las cuerdas es de 6,72 m, calcular el ángulo que forman las cuerdas.
Rta: 31°59'27"

Matemática
Ingreso 2017

UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

itu
INSTITUTO TECNOLÓGICO
UNIVERSITARIO